

Introducción al álgebra lineal

Juan Mario Vargas Guambo

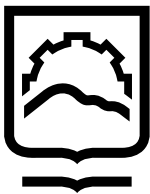


ESPOCH
2025

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

Juan Mario Vargas Guambo



**Decanato
de Publicaciones**



esPOCH

Introducción al álgebra lineal

© 2025

Juan Mario Vargas Guambo.

© 2025 Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Panamericana Sur, kilómetro 1 ½
Instituto de Investigaciones
Dirección de Publicaciones Científicas
Riobamba, Ecuador
Teléfono: 593 (03) 2 998-200
Código Postal: EC0600155

Aval ESPOCH

Este libro se sometió a arbitraje bajo el sistema de doble ciego
(*peer review*)

Corrección y diseño:
La Caracola Editores

Impreso en Ecuador

Prohibida la reproducción de este libro, por cualquier medio,
sin la previa autorización por escrito de los propietarios del
Copyright

CDU: 512

Introducción al álgebra lineal

Riobamba: Escuela Superior Politécnica de Chimborazo

Decanato de Publicaciones, Año 2025

136 pp. vol: 1 17 x 24 cm

ISBN: 978-9942-51-072-3

1. Álgebra

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	8
Estructura	9
Capítulo I	11
1. Matrices y determinantes	11
1.1. Introducción a las matrices	11
1.2. Matrices cuadradas	12
1.2.1. Matriz triangular superior	12
1.2.2. Matriz triangular inferior	13
1.2.3. Matriz diagonal y matriz simétrica	13
1.3. Operaciones con matrices: adición, sustracción y multiplicación	20
1.4. Potencia de una matriz	26
1.5. Propiedades de la suma, multiplicación y transpuesta de matrices	30
1.6. Aplicaciones con el programa Derive 6.0	32
1.7. Definición de determinante	38
1.8. Determinante de una matriz	40
1.9. Propiedad de los determinantes	43
1.10. Aplicación de los determinantes	49
1.11. Ejercicios	53
Capítulo II	55
2. La inversa y los sistemas de ecuaciones	55
2.1. La inversa de una matriz	55
2.2. Formas de determinar la inversa de una matriz	56

2.2.1.	Procedimiento gaussiano	56
2.2.2.	Método de cofactores	60
2.3.	La inversa y los sistemas de ecuaciones	62
2.4.	Resolución de sistema de ecuaciones aplicando la eliminación de Gauss-Jordan, a través de ejemplos	63
2.5.	Resolución de sistema de ecuaciones aplicando el método de cofactores	68
2.6.	Resolución de sistemas de ecuaciones aplicando la Regla de Cramer	70
2.7.	La inversa de una matriz en la resolución de los sistemas de ecuaciones con el programa Derive 6.0	73
2.8.	Ejercicios	76
Capítulo III		77
3.	Vectores en R^n y espacios vectoriales	77
3.1.	Descripción del movimiento. Definiciones	77
3.2.	Definición de un vector	78
3.3.	Vectores iguales	83
3.4.	Propiedades de la suma de vectores	84
3.5.	Producto punto (interno), vectores perpendiculares (ortogonales)	87
3.5.1.	Norma y distancia de un vector	91
3.6.	Espacios vectoriales	93
3.7.	Subespacios vectoriales	95
3.8.	Ejercicios	97
Capítulo IV		99
4.	Dependencia e independencia lineal	99
4.1.	Combinación lineal	99
4.2.	Independencia lineal	102
4.3.	Base y dimensión, sistemas homogéneos	106

4.4.	Rango de una matriz aplicaciones	109
4.5.	Ejercicios de aplicación	110
Capítulo V		113
5.	Transformaciones lineales	113
5.1.	Definición de transformación lineal	113
5.2.	Teorema fundamental de las transformaciones lineales	114
5.3.	Propiedades de las transformaciones lineales	115
5.4.	Representación matricial de una transformación lineal	117
5.5.	Valores y vectores propios, matriz diagonalizable	120
5.6.	Ejercicios	122
CONCLUSIONES		124
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS		126
ANEXOS		129

INTRODUCCIÓN

La primera edición del presente libro, denominado *Introducción al álgebra lineal*, está dirigida a estudiantes del primer y segundo nivel de las carreras del Sistema Universitario Nacional, en particular de los estudiantes de la Epoch. Los usuarios encontrarán fortalezas en cada uno de los capítulos que se presentan.

El libro pretende que los alumnos vean al álgebra lineal como una asignatura primordial, y que aprecien su tremenda utilidad. Al mismo tiempo, quiere ayudarles a dominar los conceptos y técnicas básicas del álgebra lineal que necesitarán en otros cursos, tanto en matemáticas como en otras disciplinas.

También aspira a que aprecien la interacción de las matemáticas teóricas, aplicadas y numéricas que impregna la asignatura. Este libro está diseñado con aplicaciones a diferentes áreas del conocimiento con programas de fácil ejecución en ingeniería, física, química, ciencias de la computación y educación.

La preocupación por el aprendizaje centrado en el estudiante que toma la asignatura Álgebra Lineal no existe como un mejor estilo de aprendizaje único. En cualquier grupo, habrá algunos estudiantes que trabajen bien de manera independiente y otros que trabajen mejor en grupos; algunos que prefieran el aprendizaje basado en conferencias y otros que prosperen en un escenario de talleres, realizando exploraciones; algunos que gocen con las manipulaciones algebraicas, algunos que sean fanáticos del cálculo numérico (con y sin computadora) y algunos que muestren fuerte intuición geométrica.

Este libro es compatible con las recomendaciones del Lineal Algebra Curriculum Study Grup: desde un punto de vista pedagógico, para la mayoría de los estudiantes, los ejemplos concretos deben anteceder a la abstracción. No se presentan teoremas más de lo necesario, pues el libro trata de ser una herramienta útil para los semestres posteriores. En las asignaturas de Cálculo de Una Variable y Cálculo de Dos Variables, tratarán algún capítulo de este libro.

En el libro *Introducción al álgebra lineal*, también existen aplicaciones en el mundo real, y un tema de interés histórico, si no práctico. Se espera que los profesores y los estudiantes disfruten del interaprendizaje a partir de este libro, y que tengan diversión a lo largo del camino para cumplir sus objetivos planteados.

ESTRUCTURA

El libro está formado por cinco capítulos, los cuales tienen un orden específico. Cada capítulo se liga con los conocimientos de los capítulos anteriores, es decir existe una secuencia, tanto en la teoría como en la práctica, cada capítulo tiene ejercicios resueltos y por resolver.

Se tiene aplicaciones en cada capítulo, para que el lector comprenda el procedimiento y posteriormente resuelva, así como el programa el *DERIVE 6.0* en algunos capítulos, de fácil utilización y que permite reducir pasos y tiempo al profesor y al estudiante con sus aplicaciones correspondientes.

Al finalizar el curso, el estudiante será capaz de aplicar el proceso de aplicaciones en las ciencias informáticas, tomando en consideración sus efectos sobre las diferentes disciplinas del saber que se encuentran vinculadas y que tienen su influencia en diversos niveles de la técnica en el desarrollo humano cuyo propósito es contribuir al desarrollo de la ciencia y tecnología para el bienestar de la sociedad.

El primer capítulo estudia las matrices y los determinantes. En él se tratan las matrices cuadradas, las mismas que son fundamentales para los temas posteriores, así como las operaciones con matrices y sus propiedades. Para los determinantes, se tendrá presente su definición, el orden de los determinantes para poder resolverlos a partir de la definición, la matriz de cofactores, sus propiedades y las aplicaciones utilizando el programa *DERIVE 6.0*, tanto para las matrices como para los determinantes.

El segundo capítulo estudia la inversa de una matriz y los sistemas de ecuaciones, tomando en cuenta que, para la matriz inversa, deben conocer bien las matrices. Existen dos métodos posibles para encontrar la inversa de una matriz conocidos como la inversa aplicando la técnica de *GAUSS – JORDAN*, y *COFACTORES*.

En los sistemas de ecuaciones, se establecen cuatro métodos para resolver, conocidos como la técnica aplicanda *GAUSS-JORDAN*, *REDUCIDO de GAUSS*, *COFACTORES* y *CRAMER*, indicando que, para cualquier método, el resultado tiene que ser el mismo, así como su comprobación.

El tercer capítulo trata de los vectores en R^n y los espacios vectoriales. Se inicia con definición de vector, representación en R , R^2 , R^3 en forma gráfica; las operaciones se realizan en el espacio R^n , sus propiedades tanto de la suma de vectores como del producto punto.

Se estudian los vectores perpendiculares, distancia y norma de un vector, igualdad de vectores, triple producto vectorial, para consolidar tratando los espacios y subespacios vectoriales, con ejemplos resueltos y por resolver.

El cuarto capítulo estudia la definición de combinación lineal, conociendo el conjunto de vectores, para establecer la dependencia e independencia lineal de vectores. Se estudia también base, dimensión, rango de una matriz. No se demuestran propiedades complicadas. Se tienen aplicaciones y ejemplos resueltos en áreas correspondientes.

El quinto y último capítulo empieza definiendo trabajo de fuerza constante, transformación lineal, ciertos teoremas básicos necesarios, como la utilización de propiedades elementales para resolver ejemplos y las aplicaciones con la representación matricial, para terminar conociendo valores y vectores propios.

CAPÍTULO I
1. MATRICES Y DETERMINANTES

1.1. INTRODUCCIÓN A LAS MATRICES

Concepto general. Una matriz se considera un arreglo u ordenamiento rectangular de elementos formado por renglones (filas) y columnas, de un cuerpo K (para nuestro caso $K=\mathbb{R}$), es decir, en la forma:

A=

a_{11}	a_{12}	a_{13}	.	.	.	a_{1j}	.	.	.	a_{1m}
a_{21}	a_{22}	a_{23}	.	.	.	a_{2j}	.	.	.	a_{2m}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
a_{i1}	a_{i2}	a_{i3}	.	.	.	a_{ij}	.	.	.	a_{im}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	.	.	.	a_{nj}	.	.	.	a_{nm}

$a_{m \times n}$

Es decir: $\forall a_{ij} \in K, \forall i, \forall j, i = 1, 2, 3, \dots, n; j = 1, 2, 3, \dots, m.$ $K=\text{cuerpo}$

Cada « a_{ij} » recibe el nombre de componente de una matriz.

Cada línea horizontal de componentes es una fila. Cada línea vertical es una columna.	Los subíndices indican la posición de cada componente. El primero «n» a la fila a que pertenece y el segundo «m» a la columna.	A una matriz de «n» filas y «m» columnas la llamaremos matriz de orden «n por m» y su notación es «nxm» o dimensión de la matriz.
---	--	---

Nota. A las matrices se les designa con letras mayúsculas, A, B, C, ..., etc.

Ejemplo 1

Matriz 3x3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ -3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Donde el primer elemento $a_{11}=1$; hasta el ultimo elemento $a_{33}=7$

1.2. MATRICES CUADRADAS

Si una matriz tiene el mismo número de filas que de columnas se dice que es una matriz cuadrada de orden según el número de filas y columnas que tenga, es decir $m=n$.

Existen algunos tipos de matrices cuadradas:

- Matriz triangular superior
- Matriz triangular inferior
- Matriz diagonal
- Matriz simétrica

Forma de representa a una matriz cuadrada

- Es matriz triangular superior (M.T.S): si $a_{ij} = 0$; si y solo si $i > j$
- Es matriz triangular inferior (M.T.I): si $a_{ij} = 0$; si y solo si $i < j$
- Es matriz diagonal (M.D): si $a_{ij} = 0$; si y solo si $i \neq j$
- Es matriz simétrica (MS): si y solo si $a_{ij} = a_{ji}$

1.2.1. Matriz triangular superior

Es la matriz cuadrada que tiene todos sus elementos que se encuentran por debajo de la diagonal principal nulos, es decir $a_{ij} = 0, \forall i > j$.

$$\text{M.T.S.} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

1.2.2. Matriz triangular inferior

Es la matriz cuadrada que tiene todos sus elementos que se encuentran por encima de la diagonal principal nulos, es decir $a_{ij} = 0, \forall i < j$.

$$M.T.I. = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

1.2.3. Matriz diagonal y matriz simétrica

Matriz diagonal. Es una matriz cuadrada en la que todos los elementos que no pertenecen a la diagonal principal son nulos, es decir $a_{ij} = 0, \forall i \neq j$.

$$M.D. = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Matriz simétrica. Es toda matriz tal que $A = A^t$, es decir $a_{ij} = a_{ji}$; donde A^t representa la matriz transpuesta de A .

Ejemplo 2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

$$M.S. = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

Ejemplo 3

Dada la siguiente matriz; encuentre la matriz triangular superior, inferior y diagonal

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución:

Se tiene que:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}$$

Tomamos la fila 1 como pivote y realizamos la ecuación en la cual el primer número de la fila 1 columna 1 —en este caso, 3— se resta de 1, debido a que esa es la fila, quedándonos la ecuación de $3x - 1 = 0$ y así sucesivamente.

$$\text{M.T. S} = \begin{pmatrix} \text{Pivot } 3 & 2 & 1 & f_1 \\ 0 & \frac{8}{3} & \frac{10}{3} & f_2 \\ 0 & \frac{-1}{3} & \frac{-5}{3} & f_3 \end{pmatrix}$$

Operación indicada

$3x-1=0;$	$F2 \rightarrow 1/3 F1+F2$	$F3 \rightarrow -2/3 F1+F3$
$x=1/3$	$1 \quad 2/3 \quad 1/3$	$-2 \quad -4/3 \quad -2/3$
$3x+2=0$	$-1 \quad 2 \quad 3$	$2 \quad 1 \quad -1$
$x=2/3$	$0 \quad 8/3 \quad 10/3$	$0 \quad -1/3 \quad -5/3$

Así se tienen las nuevas filas de f_2 y f_3

- Ahora tomamos a f_2 como pivote de la matriz resultante y se tiene:

$8x/3 - 1/3 = 0$	$F3 \rightarrow -1/8 F2+F3$
$x=1/8$	$0 \quad 1/3 \quad 10/24$
	$0 \quad -1/3 \quad -5/3$
	$0 \quad 0 \quad -5/4$

- La matriz resultante nos quedaría de la siguiente forma:

$$M.T.S = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 10 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ & & 4 \end{bmatrix}$$

- Así comprobamos que el determinante de la matriz debe ser igual a la multiplicación de la diagonal principal. El determinante de la matriz es:

$$A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}; |A| = -6 + 12 - 1 - 4 - 9 - 2 = -10$$

+ + +

- De igual forma se realiza para la matriz triangular inferior.

$$M.T.I = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix} \rightarrow M.T.I = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 5 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix} \text{Pivote}$$

$$\begin{array}{lcl} -x + 3 = 0; & f_2 \rightarrow 3f_3 + f_2 & f_1 \rightarrow f_3 + f_1 \\ x = 3 & 6 & 3 & -3 \\ & -1 & 2 & 3 \\ & \hline & 5 & 5 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{lcl} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 3 & 0 \end{array}$$

$x = 1$

- Ahora tomamos a f_2 pivote se tiene:

$$\begin{array}{l} 5X + 3 = 0 \\ X = -3/5 \end{array} \quad \begin{array}{l} F1 \rightarrow -3/5 F2 + F1 \\ \hline -3 \quad -3 \quad 0 \\ 5 \quad 3 \quad 0 \\ \hline 2 \quad 0 \quad 0 \end{array}$$

- Por último, encontramos la matriz diagonal. Para ello partimos de la M.T.I., y realizamos el mismo procedimiento, como si nos pidiera encontrar la M.T.S.

$$\begin{array}{lcl}
 \text{PIVOTE} & \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & F1 \\ 5 & 5 & 0 & F2 \\ 2 & 1 & -1 & F3 \end{array} \right] & \xrightarrow{F2 \rightarrow -5/2 F1 + F2} \text{M.D=} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 0 & F1 \\ 0 & 5 & 0 & F2 \text{ PIVOTE} \\ 0 & 1 & -1 & F3 \end{array} \right] \\
 2X + 5 = 0; & F2 \rightarrow -5/2 F1 + F2 & F1 \rightarrow -F1 + F3 \\
 X = -5/2 & \begin{array}{ccc} -5 & 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{ccc} -2 & 0 & 0 \end{array} \\
 2X + 2 = 0 & \begin{array}{ccc} 5 & 5 & 0 \end{array} & \begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \end{array} \\
 X = -1 & \begin{array}{ccc} 0 & 5 & 0 \end{array} & \begin{array}{ccc} 0 & 1 & -1 \end{array}
 \end{array}$$

- Ahora tomamos a F_2 pivote se tiene

$$\begin{array}{lcl}
 5X + 1 = 0 & F3 \rightarrow -1/5 F2 + F3 & \\
 X = -1/5 & \begin{array}{ccc} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array} &
 \end{array}$$

$$M.D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}$$

Nota. En la matriz triangular superior, inferior y diagonal, al multiplicar los elementos de la diagonal principal, el resultado debe ser igual al determinante de la matriz que se encontró, para indicar que sus matrices encontradas son las correctas.

Segunda forma con números enteros

En esta parte, se indica que, para encontrar la matriz triangular superior, se deben tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

La matriz que se indica:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}$$

- Se indica que primero se debe realizar la operación de los números 3 que se encuentran en la f_1 con el número 1 que está en la f_2 ; es decir, 3 multiplica a f_2 y 1 multiplica a f_1 .
- La segunda operación que se encuentra con el número 3 que se encuentran en la f_1 , con el número 2 que está en f_3 , es decir 3 multiplica a f_3 y -2 multiplica a f_1 .
- Por último, se realiza la operación con la f_2 , entre el número 8 que se encuentra en la nueva f_2 con el número 1 que está en la nueva f_3 .

$$M.T.S = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 8 & 10 \\ 0 & -1 & -5 \end{bmatrix} \begin{matrix} f_1(1)(-2) \\ f_2(3) \\ f_3(3)(8) \end{matrix} ; M.T.S = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & -30 \end{bmatrix} \begin{matrix} f_1 \\ f_2(1) \\ f_3 \end{matrix}$$

$$f_2 \rightarrow f_1 + 3f_2$$

$$\begin{array}{rrr} 3 & 2 & 1 \\ -3 & 6 & 9 \\ \hline 0 & 8 & 10 \end{array}$$

$$f_3 \rightarrow -2f_1 + 3f_3$$

$$\begin{array}{rrr} -6 & -4 & -2 \\ 6 & 3 & -3 \\ \hline 0 & -1 & -5 \end{array}$$

Ahora tomamos a f_2 pivote. Se tiene:

$$f_3 \rightarrow -f_2 + 8f_3$$

$$\begin{array}{rrr} 0 & 8 & 10 \\ 0 & -8 & -40 \\ \hline 0 & 0 & -30 \end{array}$$

Para comprobar, multiplicamos la diagonal principal, pero bajando a dividir el número 3 a la fila 2 y fila 3, así como el número 8 solo a la fila 3. Se tiene la siguiente operación:

$$3 \times (8/3) \times (-30/3 \times 8) = -10$$

De esta manera, se comprueba con la segunda forma que se puede encontrar la solución de una matriz triangular superior.

Para el caso de una matriz triangular inferior, se realiza el mismo procedimiento, tomando en cuenta que se parte de la fila 3 de la matriz propuesta.

Se concluye que la matriz triangular superior, inferior y diagonal de la primera forma se apoyó en el determinante de la matriz para hallar su forma correcta de solución.

En la segunda forma también se determinó que las matrices se descomponen, tomando en cuenta las operaciones que se realizaron. Para no tener problema en lo posterior.

Recomendaciones:

- Se recomienda realizar las operaciones indicadas, puesto que, al equivocarse en alguna operación, no se logrará encontrar la solución correcta.
- De la misma manera, se sugiere realizar el ejemplo en la forma en que se entendió mejor.

Transpuesta de una matriz y matriz identidad

Matriz transpuesta

Se denomina matriz transpuesta ya que se obtiene el intercambio de filas por columnas. Es decir:

Matriz original	Matriz transpuesta
$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	$A^t = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$

Nota. Toda matriz simétrica siempre es transpuesta, pero no toda matriz transpuesta es simétrica.

Matriz identidad

Una matriz es identidad si es matriz cuadrada, donde los elementos de la diagonal principal son iguales a 1, y los demás elementos son 0.

La siguiente relación representa a la matriz identidad:

$$I_{m \times n} = e_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

Dada la siguiente matriz, encuentre su matriz identidad aplicando la relación indicada

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}; \text{ se dice que } \begin{cases} \text{escriba } 1 \text{ si } i = j \\ \text{escriba } 0, \text{ si } i \neq j \end{cases}; a_{ii} = 1; \text{ puesto que } i = j$$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota. Una matriz identidad es una matriz diagonal, pero no todas las matrices diagonales son matrices identidad. La distinción clave es que una matriz identidad es un caso particular de matriz diagonal en el que todos los elementos en la diagonal principal son 1, y todos los demás elementos son 0.

Ejemplo 4

Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Encuentre la relación indicada:

$$I * A = A$$

Se debe realizar una simple multiplicación de matrices para que cumpla la relación indicada

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Aplicando la fórmula: $I * A = A$

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Al multiplicar la primera fila de $I = (1 \ 0 \ 0)$

Con la primera columna de $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

Vamos a obtener el resultado del primer número ubicado en la fila 1 columna

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Es decir:

$$(1*1) + (0*4) + (0*7) =$$

$$1 + 0 + 0 = 1$$

Lo mismo se aplica en todas las filas y columnas.

Nota: la multiplicación de matrices se explicará más adelante cuando se trate de operaciones entre matrices, que no tiene dificultad alguna.

Vector renglón y columna

Vector renglón	Vector columna
Es el que está formado por un solo renglón y n columnas $R = [r_{11} \ r_{12} \ r_{13} \ \dots \ r_{1n}]_{1 \times n}$	Es el que está formado por una sola columna y m renglones $C = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ c_{31} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix}_{m \times 1}$

1.3. OPERACIONES CON MATRICES: ADICIÓN, SUSTRACCIÓN Y MULTIPLICACIÓN

Si $A, B, C \in M_{m \times n}$, se puede realizar las siguientes operaciones como la suma, diferencia y multiplicación de matrices.

Suma de matrices

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1j} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2j} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{ij} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{im} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nj} & \cdot & \cdot & \cdot & a_{nm} \end{bmatrix}_{m \times n} \quad \gamma \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1j} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{2j} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{ij} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{im} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{nj} & \cdot & \cdot & \cdot & b_{nm} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Es decir: $A+B$; $A-B$; $A \cdot B$.

Para la suma, se tiene que, si $A = (a_{ij})_{m \times n}$ y $B = (b_{ij})_{m \times n}$ son dos matrices del mismo orden, entonces se define la suma $A + B$ como la matriz de orden $m \times n$, $C = (c_{ij})_{m \times n}$ tal que:

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

Ejemplo 5

Dadas las siguientes matrices, encuentre la suma de $A + B$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \\ 2 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ -3 & 3 & -5 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: se suman los elementos correspondientes de cada matriz de la siguiente forma.

$$A+B = \begin{bmatrix} 1-3 & 2+0 & 4+4 \\ 3-3 & 4+3 & -5-5 \\ 2+2 & -4+2 & 3+1 \end{bmatrix}; A+B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 8 \\ 0 & 7 & -10 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Ejemplo 6

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 8 \\ 0 & 7 & -10 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix} + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; A+B = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 8 \\ 0 & 7 & -10 \\ 4 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Nota. La suma de toda matriz con una matriz nula da como resultado la misma matriz.

Diferencia de matrices

La diferencia de las matrices A y B, de orden $m \times n$, se define como la matriz

$D = A + (-B)$. es decir, $D = (d_{ij})_{m \times n}$ tal que:

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

Ejemplo 7

Dadas las siguientes matrices, encuentre su diferencia.

$$A = \begin{bmatrix} 16 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -5 \\ 7 & -4 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces $A + (-B)$:

$$\begin{bmatrix} 16 - (-3) & 2 - 7 & 4 - 4 \\ -3 - (-3) & 0 - 2 & -5 - 5 \\ 7 - 0 & -4 - 2 & 3 - 1 \end{bmatrix}$$

La solución es: $A - B = \begin{bmatrix} 19 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & -10 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

Producto de un escalar por una matriz

Dado el número real $k \neq 0$ y la matriz $A_{m \times n}$, el producto kA es otra matriz del mismo orden, que resulta de multiplicar cada elemento de A por k .

$$k \cdot A = K \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} \dots & a_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \dots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} \dots & ka_{2n} \\ ka_{31} & ka_{32} \dots & ka_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}_{m \times n}$$

Producto de matrices

Sea $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ y $B = [b_{ij}]_{n \times r}$ matrices. El producto AB se define como la matriz $C = [c_{ij}]_{m \times r}$ donde la componente de la fila i y la columna j es:

$$c_{ij} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{in} b_{nj}, \text{ para } i = 1, 2, 3, \dots, m, \text{ y } j = 1, 2, 3, \dots, r.$$

Este producto solo está definido cuando el número de columnas de la matriz A es igual a número de filas de la matriz B

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2r} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & b_{i3} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{ir} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & b_{m3} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mr} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ir} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mr} \end{bmatrix}$$

c_{ij} es la suma de los productos de los elementos de la fila i de A por los elementos de la columna j de B respectivamente.

En símbolos, hay otra forma de representar a la multiplicación de matrices:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

O también se indica $A \cdot B = C = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$

Ejemplo 8

Dadas las siguientes matrices A y B respectivamente, hallar su multiplicación

$$A_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 12 & 10 & -6 \end{bmatrix} \quad B_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} -3 & 7 & 4 \\ -3 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: aplicando la definición de producto de matrices, se tiene que verificar que la columna de la primera matriz debe ser igual a la fila de la segunda matriz para realizar la operación, es decir $A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 3} = C_{2 \times 3}$. Para el caso, se multiplica la primera fila por la primera columna sus elementos correspondientes de la siguiente manera

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 3} = C_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 3(-3) + (-2)(-3) + 0(0) & 3(7) + (-2)2 + 0(2) & 3(4) + (-2)5 + 0(1) \\ 12(-3) + 10(-3) + (-6)0 & 12(7) + 10(2) + (-6)2 & 12(4) + 10(5) + (-6)1 \end{bmatrix}$$

$$A_{2 \times 3} \cdot B_{3 \times 3} = C_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} -9 + 6 + 0 & 21 - 4 + 0 & 12 - 10 + 0 \\ -36 - 30 - 0 & 84 + 20 - 12 & 48 + 50 - 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 17 & 2 \\ -66 & 92 & 92 \end{bmatrix} = A \cdot B$$

Nota. La multiplicación de matrices se puede también representar aplicando sumatorias de la siguiente manera

Sean la matrices A, B donde $A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$: con sus respectivas dimensiones

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ mxn \end{matrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ nxp \end{matrix} \quad C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} \\ \\ mxn \end{matrix}$$

Se puede representar a través de sumatorias la matriz C resultante de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{kn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{k1} & \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{k2} & \cdots & \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{kn} \end{bmatrix}$$

Donde $C_{11} = \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1}$, es decir para $k= 1, 2, \dots n$

Igual para $C_{12} = \sum_{k=1}^n a_{1k}b_{k2} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + \cdots + a_{1n}b_{n2}$, es decir para $k= 1, 2, \dots n$

Hasta $C_{mn} = \sum_{k=1}^n a_{mk}b_{kn} = a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + \cdots + a_{mp}b_{np}$ es decir para $k= 1, 2 \dots n$

Ejemplo 9

Dada las siguientes matrices

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & \frac{1}{2} \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Encontrar:

a.- $2B - 1/3A + 4C$

b.- $A \cdot B; B \cdot A$

c.- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

Solución de a: se multiplica los escalares para cada matriz y luego se suman sus respectivas matrices.

$$2B = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -4 & 8 & 1 \\ -6 & 6 & 4 \end{bmatrix}; -\frac{1}{3}A = \begin{bmatrix} -1 & \frac{-2}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{-2}{3} & \frac{-4}{3} & \frac{-1}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & \frac{-2}{3} \end{bmatrix}; 4C = \begin{bmatrix} 12 & -8 & 4 \\ -8 & 16 & 4 \\ 0 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

$$2B - \frac{1}{3}A + 4C = \begin{bmatrix} 13 & \frac{-14}{3} & \frac{29}{3} \\ -38 & \frac{68}{3} & \frac{14}{3} \\ \frac{3}{3} & 17 & \frac{34}{3} \end{bmatrix}$$

Solución de b: se multiplica las matrices $A \cdot B$ luego $B \cdot A$. tomado en cuenta la definición de multiplicación de matrices. Luego se multiplica la fila de la primera matriz por la primera, segunda y tercera columna de la segunda matriz; posteriormente, se multiplica la segunda fila de la primera matriz por la primera, segunda y tercera columna de la segunda matriz; por último, se multiplica la tercera fila de la primera matriz por la primera, segunda y tercera columna de la segunda matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & \frac{1}{2} \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}; A \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & 17 & 12 \\ -9 & 23 & 10 \\ -14 & 14 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

Si $A \cdot B = D$, entonces:

$$d_{11} = 3(1) + 2(-2) + 1(-3) = -4; d_{21} = 2(1) + 4(-2) + 1(-3) = -9; d_{31} = -2(1) + 3(-2) + 2(-3) = -14$$

$$d_{12} = 3(2) + 2(4) + 1(3) = 17; d_{22} = 2(2) + 4(4) + 1(3) = 23; d_{32} = -2(2) + 3(4) + 2(3) = 14$$

$$d_{13} = 3(3) + 2(1/2) + 1(2) = 12; d_{23} = -2(3) + 4(1/2) + 1(2) = 10; d_{33} = -2(3) + 3(1/2) + 2(2) = -1/2$$

De la misma forma encontramos la multiplicación de $B \cdot A$. Se tiene:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & \frac{1}{2} \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}; A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}; B \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{19}{2} & 9 \\ 1 & \frac{27}{2} & 3 \\ -7 & 12 & 4 \end{bmatrix}$$

Nota. En la multiplicación de matrices, no se cumple de manera general la propiedad conmutativa del producto, es decir que $A \cdot B \neq B \cdot A$

Solución de c. Encontramos primero la multiplicación de $B \cdot C$ de la siguiente manera:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & \frac{1}{2} \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}; B \cdot C = \begin{bmatrix} -1 & 15 & 9 \\ -14 & \frac{43}{2} & 3 \\ -15 & 24 & 4 \end{bmatrix}$$

Luego multiplicamos la matriz $A \cdot (B \cdot C)$; de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}; B \cdot C = \begin{bmatrix} -1 & 15 & 9 \\ -14 & \frac{43}{2} & 3 \\ -15 & 24 & 4 \end{bmatrix}; A \cdot (B \cdot C) = \begin{bmatrix} -46 & 112 & 37 \\ -73 & 140 & 34 \\ -70 & \frac{165}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Ahora tenemos que realizar la operación de multiplicar $(A \cdot B) \cdot C$, para lo cual multiplicamos primero la matriz $A \cdot B$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & \frac{1}{2} \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}; A \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & 17 & 12 \\ -9 & 23 & 10 \\ -14 & 14 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

Luego $(A \cdot B) \cdot C$:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -4 & 17 & 12 \\ -9 & 23 & 10 \\ -14 & 14 & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}; (A \cdot B) \cdot C = \begin{bmatrix} -46 & 112 & 37 \\ -73 & 140 & 34 \\ -70 & \frac{165}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, se cumple que

$$A \cdot (B \cdot C) = \begin{bmatrix} -46 & 112 & 37 \\ -73 & 140 & 34 \\ -70 & \frac{165}{2} & -1 \end{bmatrix} = (A \cdot B) \cdot C = \begin{bmatrix} -46 & 112 & 37 \\ -73 & 140 & 34 \\ -70 & \frac{165}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

1.4. POTENCIA DE UNA MATRIZ

En álgebra lineal, la potencia de una matriz es el resultado de multiplicar la matriz por sí misma un número determinado de veces. La matriz debe ser cuadrada para poder elevarla a una potencia.

Cálculo de potencias de matrices. El cálculo de potencias de matrices se puede realizar de forma manual o utilizando un *software* matemático.

Método manual. El método manual para calcular potencias de matrices consiste en multiplicar la matriz por sí misma tantas veces como sea necesario. Por ejemplo, la potencia de la matriz A, a la segunda se calcula como sigue:

$$A^2 = A \cdot A$$

La potencia de la matriz A, a la tercera se calcula como sigue:

$$A^3 = A \cdot A \cdot A$$

Y así sucesivamente:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{n \text{ factores}}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}$$

Propiedades de las potencias de matrices

Las potencias de matrices tienen algunas propiedades interesantes, entre las que se incluyen:

- La potencia de la matriz identidad es la matriz identidad para cualquier exponente.
- La potencia de una matriz invertible es invertible para cualquier exponente distinto de cero.
- El determinante de la potencia de una matriz es igual al determinante de la matriz elevado al exponente.

Ejemplos de potencias de matrices

A continuación, se muestran algunos ejemplos de potencias de matrices:

La potencia de la matriz identidad de orden 2 a la segunda es la matriz identidad de orden 2:

$$\text{a.- } I^2 = I \cdot I, \text{ es decir si } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; \text{ entonces } I^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$I^2 = I * I$$

- La potencia de la matriz de orden 2 es la matriz siguiente:

$$b.- A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; A^2 = \begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}. A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; A^3 = \begin{bmatrix} 37 & 54 \\ 81 & 118 \end{bmatrix}$$

- La potencia de la matriz siguiente a la negativa es la matriz inversa:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz periódica, matriz nilpotente, polinomio de matrices

Matriz periódica

En álgebra lineal, una matriz cuadrada A se llama periódica si existe un número natural p tal que $A^p = A$. El número p se llama período de A .

Por ejemplo, la matriz siguiente es periódica de período 2:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = A. A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz nilpotente

En álgebra lineal, una matriz cuadrada A se llama nilpotente si existe un número natural p tal que $A^p = 0$. Es decir, la matriz nula

Por ejemplo, la matriz siguiente es nilpotente de período 2:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$B^2 = B. B = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Polinomio de matrices

En álgebra lineal, un polinomio de matrices es una expresión de la forma

$$p(A) = a_0 I + a_1 A + a_2 A^2 + \dots + a_n A^n$$

donde A es una matriz cuadrada y los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son números reales o complejos.

El polinomio de matrices $p(A)$ se puede evaluar multiplicando A por sí misma un número determinado de veces, según los coeficientes del polinomio. Por ejemplo, si $p(A) = A^2 + 2A + 3$, entonces

$$p(A) = A^2 + 2A + 3 = A \cdot A + 2A + 3 = (A + 3)(A + 1)$$

Ejemplo 10

Dada la siguiente matriz

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Encuentre el siguiente polinomio de matrices

$$A^2 + 3A - 1$$

Solución: debemos encontrar primero la matriz A^2 de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}; A^2 = \begin{bmatrix} 13 & -11 & 3 \\ -14 & 23 & 4 \\ -6 & 18 & 7 \end{bmatrix}$$

$$3A = \begin{bmatrix} 9 & -6 & 3 \\ -6 & 12 & 3 \\ 0 & 9 & 6 \end{bmatrix}; -1 \cdot I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \text{por tanto:}$$

$$A^2 + 3A - 1 = \begin{bmatrix} 21 & -17 & 6 \\ -20 & 34 & 7 \\ -6 & 27 & 12 \end{bmatrix}$$

Aplicaciones de las matrices periódicas, nilpotente y de polinomios de matrices

Las matrices periódicas, nilpotente y los polinomios de matrices tienen una gran variedad de aplicaciones, entre las que se incluyen:

- **El estudio de sistemas dinámicos.** Las matrices periódicas se utilizan para modelar sistemas dinámicos periódicos, como los osciladores.
- **La resolución de ecuaciones diferenciales.** Las matrices nilpotentes se utilizan para resolver ecuaciones diferenciales lineales.
- **La criptografía.** Los polinomios de matrices se utilizan en criptografía para generar claves criptográficas.

1.5. PROPIEDADES DE LA SUMA, MULTIPLICACIÓN Y TRANSPUESTA DE MATRICES

Propiedades de la suma de matrices

Sean las matrices $A, B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, las siguientes propiedades son siempre verdaderas:

- i.- $A+B=B+A$; *propiedad conmutativa*
- ii.- $A+(B+C)=A+(B+C)$; *propiedad asociativa respecto a la suma*
- iii.- $A+0=A$; *propiedad del neutro aditivo*
- iv.- $A+(-A)=A$; *propiedad del inverso aditivo*

Demostración de la propiedad i).

Representaremos primero las matrices de la siguiente manera

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix}; \text{ ahora sumamos las matrices}$$

$m \times n$ $m \times n$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} & \cdots & + a_{1n}b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{m1} + a_{m2}b_{m2} & \cdots & + a_{mn}b_{mn} \end{bmatrix}$$

Puesto que la propiedad que se va a demostrar es conmutativa, se puede conmutar sus elementos de las matrices de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} b_{11}a_{11} + b_{12}a_{12} & \cdots & + b_{1n}a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1}a_{m1} + b_{m2}a_{m2} & \cdots & + b_{mn}a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ así se tiene las matrices:}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} + A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}; \text{ que es } B + A; \text{ llqgd.}$$

Nota. Las demás propiedades se dejan al lector que demuestre, puesto que se sigue el mismo procedimiento anterior.

Propiedades de la multiplicación de matrices

Sean A, B, C y D matrices de tamaño tales que las operaciones indicadas están bien definidas y α un número real. Entonces

1. $A(BC) = (AB)C$ *Propiedad asociativa respecto al producto de matrices*
2. $A(B+D) = AB + AD$ *Distributiva del producto de matrices con respecto a la suma de matrices por la izquierda.*
3. $(B+D)C = BC + DC$ *Distributiva del producto de matrices con respecto a la suma de matrices por la derecha.*
4. $\alpha(AB) = A(\alpha B)$

Las cuatro propiedades son siempre verdad, y las tres primeras propiedades se pueden demostrar aplicando sumatorias de la siguiente manera:

DEMOSTRACIÓN:

1. Sean $A=[a_{ij}]_{m \times n}$, $B=[b_{ij}]_{n \times r}$ y $C=[c_{ij}]_{r \times p}$, matrices AB es una matriz de orden $m \times r$, BC es una matriz de orden $n \times p$, $(AB)C$ es una matriz de orden $m \times p$ y $A(BC)$ es una matriz de orden $m \times p$, sean $E=AB$, $F=BC$, $G=(AB)C$ y $H=A(BC)$; debemos probar que $G = H$, es decir que $g_{ij} = h_{ij}$ para $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, p$, por la definición de multiplicación.

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^r e_{ik} c_{kj} \text{ y } e_{ij} = \sum_{j=1}^n e_{ij} c_{jk} \text{ entonces se tiene:}$$

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^r \left[\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} \right) \right] c_{kj} = \sum_{k=1}^r \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} c_{kj} \right), \text{ ya que}$$

$$c_{kj} \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk} c_{kj} \quad (*)$$

Aplicando la definición de multiplicación a $H = AF$ obtenemos

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} f_{kj}$$

Y, como $F = BC$, entonces se tiene que

$$f_{kj} = \sum_{i=1}^r b_{ki} c_{ij} \quad ; \text{ entonces } h_{ij} = \sum_{k=1}^n \left[a_{ik} \left(\sum_{i=1}^r b_{ki} c_{ij} \right) \right] = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^r a_{ik} b_{ki} c_{ij} \right)$$

Y como los índices son ficticios, podemos escribir:

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^n \left(\sum_{i=1}^r a_{ik} b_{ki} c_{ij} \right) \quad (**)$$

Así, comparando (*) y (**), se prueba la propiedad $G = H$, es decir que $g_{ij} = h_{ij}$ para $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, p$, es decir $A(BC) = (AB)C$ llqdd.

- Sean $A = [a_{ij}]_{n \times m}$ y $B = [b_{ij}]_{m \times p}$ y $D = [d_{ij}]_{n \times p}$; la componente kj de $B+D$ es $b_{kj} + d_{kj}$ y la componente ij de $A(B+D)$ es $\sum_{k=1}^m a_{ik} (b_{kj} + d_{kj}) = \sum_{k=1}^m a_{ik} b_{kj} + \sum_{k=1}^m a_{ik} d_{kj}$; la componente ij de AB más la componente de ij de AD y esto prueba.

$$A(B+D) = AB + AD$$

Las demostraciones de las propiedades 3 y 4 se las deja al lector.

1.6. APLICACIONES CON EL PROGRAMA DERIVE 6.0

Derive es un *software* o un programa de matemáticas, el mismo que procesa variables, expresiones, ecuaciones, funciones, vectores y matrices al igual que una calculadora científica.

Esta herramienta permite realizar cálculos numéricos y simbólicos, con álgebra, trigonometría y análisis además de representaciones gráficas en dos y en tres dimensiones. Lo pueden utilizar tanto estudiantes de los primeros niveles de Universidad como profesores debido a que es de fácil uso y sus comandos no son difíciles de ejecutar.

Es la herramienta ideal para apoyar el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. De hecho, es fácil comprobar que muchos temas pueden tratarse más eficientemente; es decir, permite realizar cálculos sencillos y optimiza el tiempo.

Para nuestro caso se utilizará para desarrollar ejemplos de matrices, polinomio de matrices, encontrar el determinante de una matriz de cualquier orden. De igual forma, se encontrará la inversa de una matriz, y también la resolución de sistemas de ecuaciones con m incógnitas y n variables, aplicando técnicas conocidas.

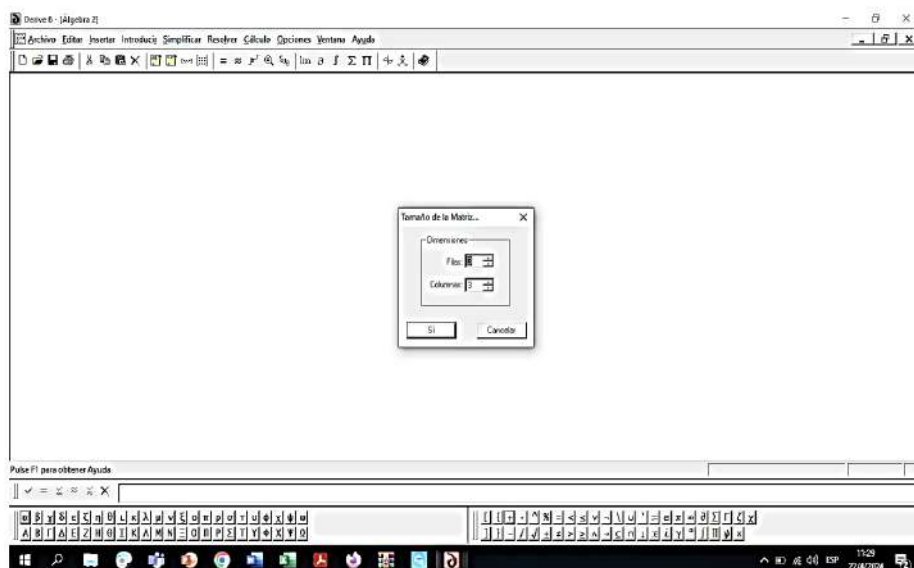
Ejemplos:

Partiremos de presentar el programa Derive 6.0 de la siguiente manera:

Para representar las matrices, primero ingresamos al programa Derive 6.0, el mismo que se puede descargar en el siguiente link <https://derive.uptodown.com/window>.

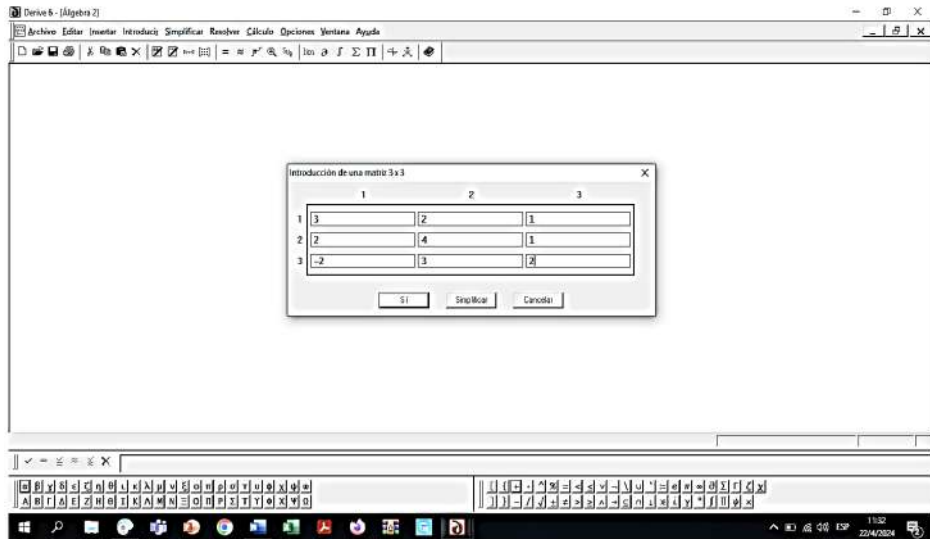
En la figura correspondiente en la parte superior, se tienen algunos comandos sencillos, como archivo, editar, insertar, introducir, encuentra también en el comando introducir las matrices para resolver: Aparece la figura de esta forma.

Figura 1.1. Ingreso al Derive 6.0



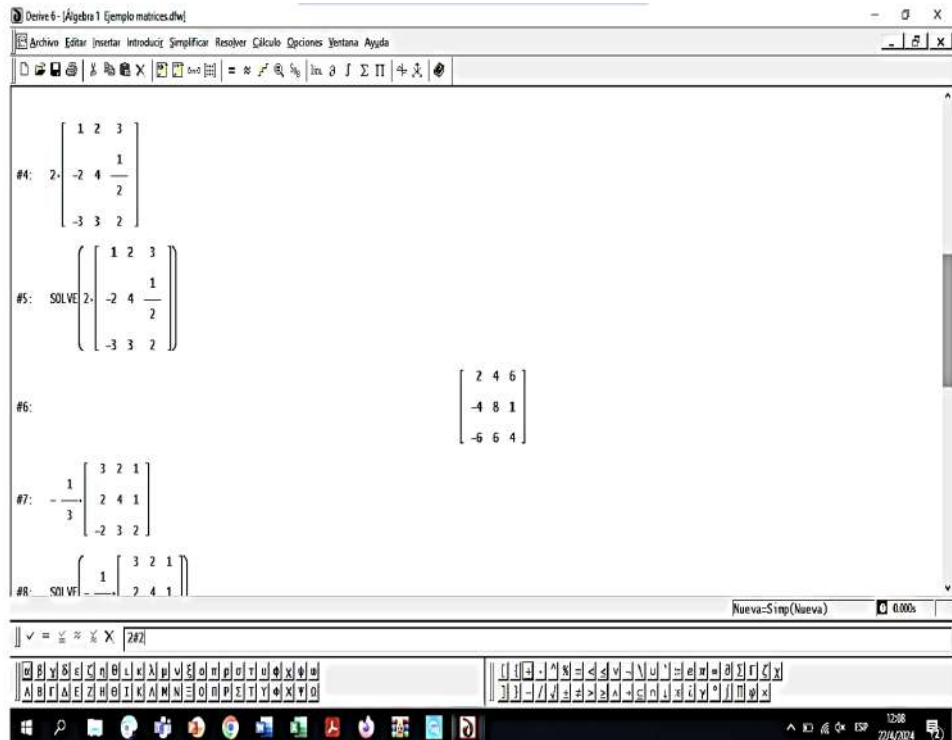
Fuente: Derive 6.0

Figura 1.2. Representación de una matriz



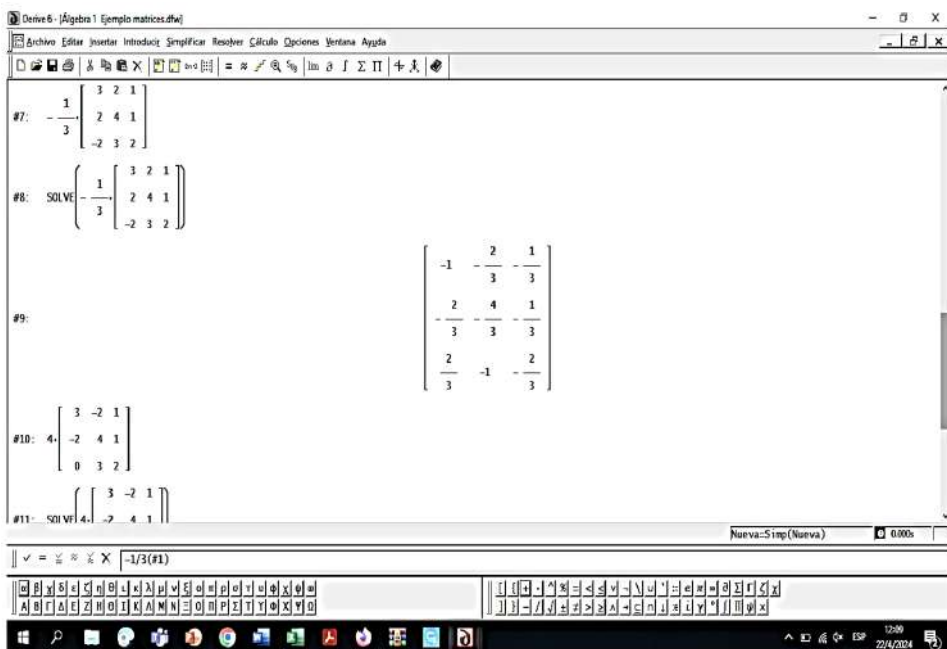
Fuente: Derive 6.0

Figura 1.3. Operación con matrices



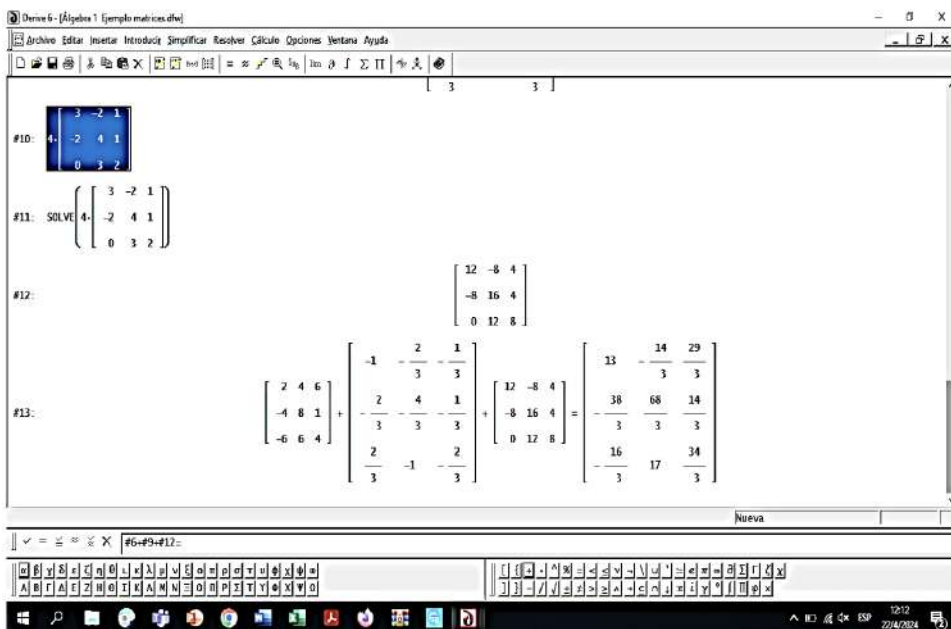
Fuente: Derive 6.0

Figura 1.4. Multiplicación de un escalar por una matriz



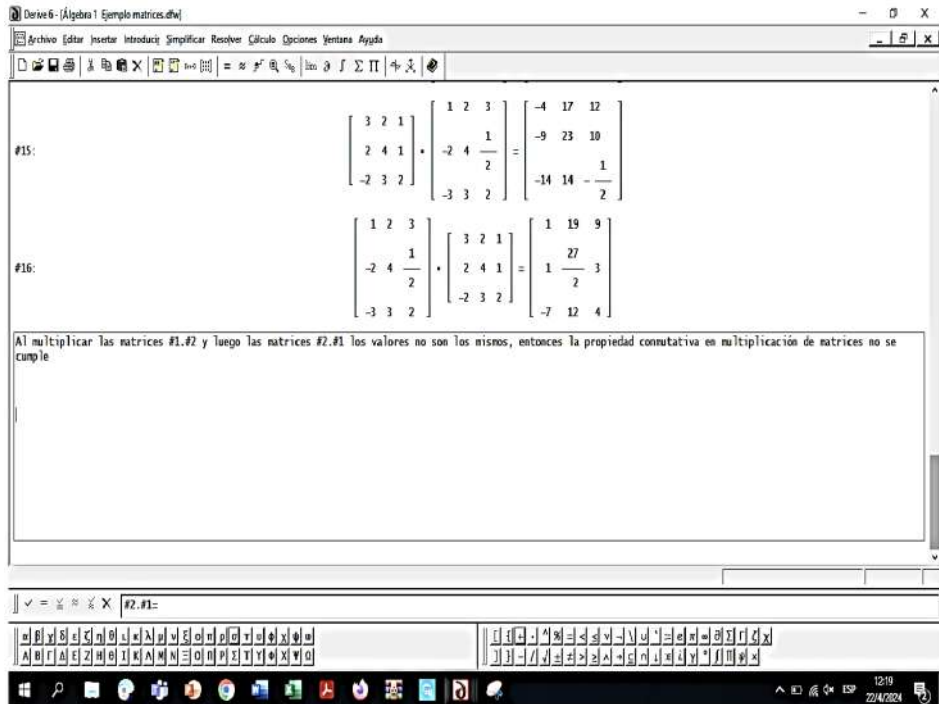
Fuente: Derive 6.0

Figura 1.5. Multiplicación de matrices



Fuente: Derive 6.0

Figura 1.6. Multiplicación de matrices

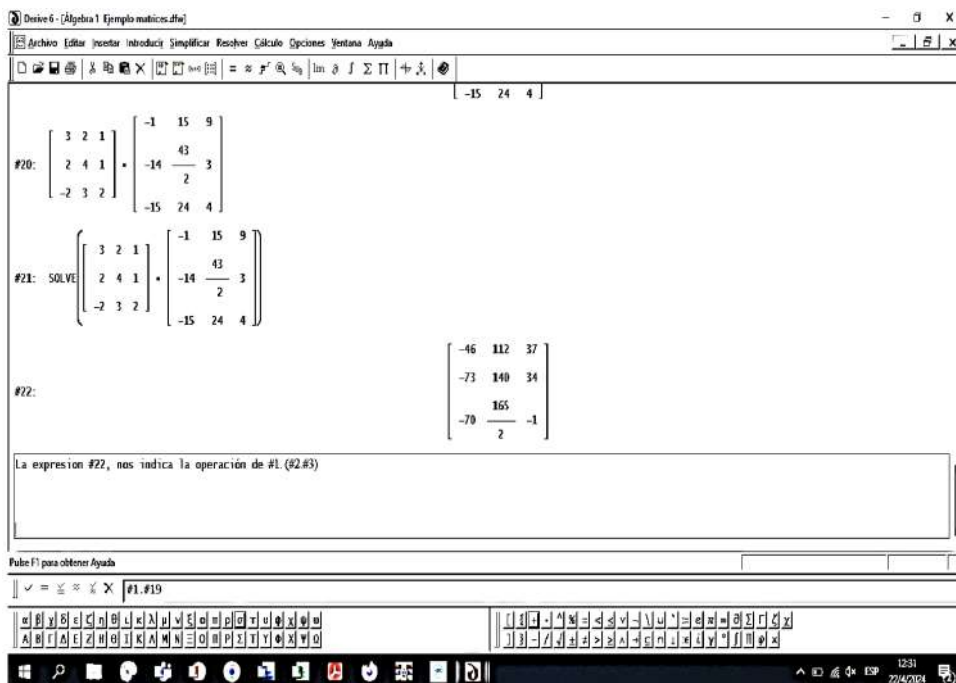


Fuente: Derive 6.0

Es decir: las dos matrices son distintas

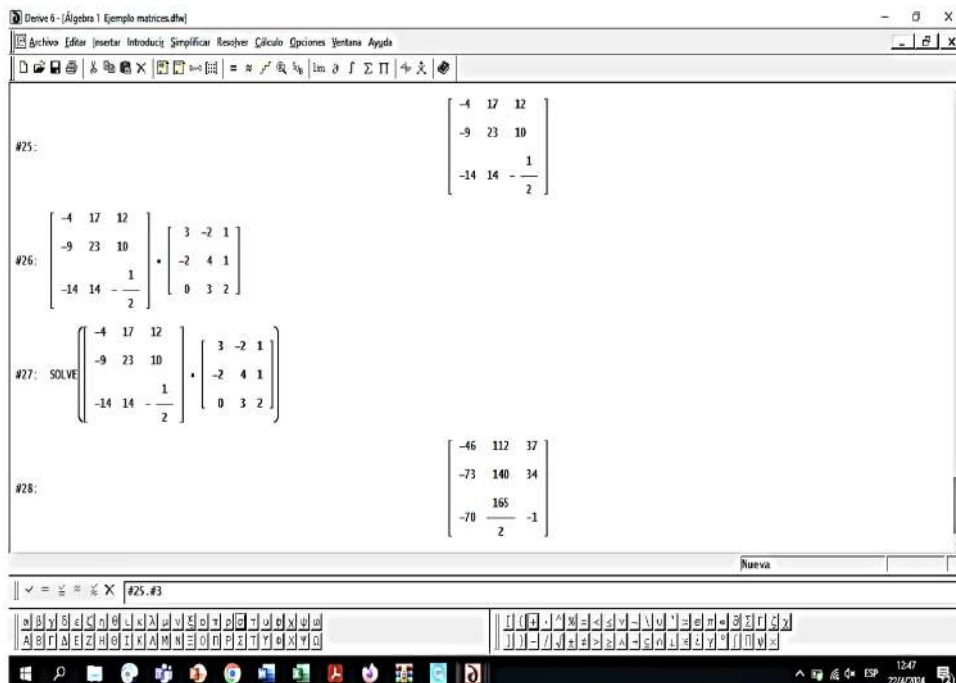
$$\begin{bmatrix} -4 & 17 & 12 \\ -9 & 23 & 10 \\ -14 & 14 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 19 & 9 \\ 1 & \frac{27}{2} & 3 \\ -7 & 12 & 4 \end{bmatrix}$$

Figura 1.7. Aplicación propiedad de matrices



Fuente: Derive 6.0

Figura 1.8. Demostración propiedad de matrices



Fuente: Derive 6.0

1.7. DEFINICIÓN DE DETERMINANTE

En su definición formal (como función multilinear alternada), el determinante es una función específica que se asocia con una matriz cuadrada. La notación común para el determinante de una matriz A se denota como $\det(A)$ o $|A|$. Además, sabemos que existen diferentes reglas y métodos para calcular los determinantes

Se indica también que el determinante es el valor que se obtiene luego aplicar algún método o técnica siempre y cuando las matrices sean cuadradas.

Determinante de una matriz (1x1), (2x2) y (3x3)

Reglas para cada dimensión:

1. Dimensión 1x1

Si la dimensión de la matriz es 1x1, solo tiene un elemento y su determinante es dicho elemento, es decir:

$$A = (a)$$

$$|A| = a$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } A = (-5), \text{ su } \det(A) = -5$$

2. Dimensión 2x2

La matriz cuadrada de dimensión 2x2 tiene la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

Regla: calculamos el determinante, multiplicando los elementos de su diagonal principal, manteniendo el signo; luego se multiplican los elementos de la diagonal secundaria cambiando de signo.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Ejemplo: Dada la siguiente matriz, encuentre su determinante

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

Solución. Aplicando la definición, se tiene.

$$\det(A) = 1 \cdot 10 - 3 \cdot 3 = 10 - 9 = 1$$

3. Dimensión 3x3

La matriz cuadrada de dimensión 3x3, tiene la forma

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Regla. Para hallar la solución se tiene que representar la matriz de inicio, aumentando dos columnas a la derecha de la matriz de la siguiente forma:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\ - & - & - & + & + & + \end{array}$$

Se multiplican los elementos de las diagonales principales con flecha hacia abajo (azul), manteniendo, luego multiplicamos los elementos de las diagonales secundarias cambiando de signo: $a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33}$

Ejemplo 11

Dada la siguiente matriz, encuentre su determinante:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Solución: aplicando la regla correspondiente se tiene.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 0 & 4 & -1 \\ 4 & 3 & -2 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 1(-1)(-2) + 2(0)(4) + 3(4)(3) - 3(-1)(4) - 1(0)(3) - 2(4)(-2) =$$

$$2 + 0 + 36 + 12 - 0 + 16 = 66$$

1.8. DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

Desarrollo de un determinante por cofactores

Menores y cofactores:

En esta sección, se calcularán determinantes haciendo uso de dos conceptos, el de menor de un determinante y el de matriz por cofactores de un elemento.

Matriz de cofactores

Se llama matriz de cofactores si cumple las siguientes consideraciones:

1. La matriz debe ser cuadrada.
2. Sus elementos se encuentran rayando o tachando filas y columnas correspondientes.
3. La siguiente relación permite encontrar sus elementos.

$$A^c = (-1)^{i+j} \text{ (menor o submatriz)}$$

Se llama menor al elemento a_{ij} de un determinante $D_{n \times n}$ al determinante M_{ij} orden $(n-1) \times (n-1)$ que se obtiene al eliminar el reglón i y la columna j .

Ejemplo 12

Dada la siguiente matriz de dimensión 2×2 , encuentre la matriz de cofactores:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{bmatrix}$$

Solución: para encontrar la matriz por cofactores, partimos de representar primero una matriz $A_{2 \times 2}$; luego, A^c , los elementos de la matriz de cofactores que se van a encontrar:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}; A^c = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22} \end{bmatrix}$$

Al aplicar su definición, se procede a encontrar sus elementos de A^c con la relación, $A^c = (-1)^{i+j}$ (menor o submatriz); de la siguiente manera

- $ca_{11} = (-1)^{1+1}(10) = 10$, para este valor se anula la fila 1 columna 1, y su valor es 10

- $ca_{12} = (-1)^{1+2}(3) = -3$; para este valor se anula la fila 1 columna 2, y su valor es -3
- $ca_{21} = (-1)^{2+1}(3) = -3$; para este valor se anula la fila 2 columna 1, y su valor es -3
- $ca_{22} = (-1)^{2+2}(1) = 1$; y el último valor se anula la fila 2 columna 2, y su valor es 1; por lo tanto, la matriz encontrada es:

$$A^c = \begin{bmatrix} 10 & -3 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota 1. Si queremos encontrar su determinate a partir de su matriz de cofactores, hallamos el determinante de la matriz inicial, y este coincide con el determinante de la matriz de cofactores:

Así, $\det(A) = 10 - 9 = 1$ y $\det(A^c) = 1$; además, se puede encontrar sus elementos multiplicando filas y columnas correspondientes de la matriz A y de la matriz A^c así: $(1)(10) + 3(-3) = 10 - 9 = 1$

Nota 2. Esos determinantes tienen el mismo valor, siempre y cuando la matriz tenga dimensión 2×2 .

Caso – Dimensión 3×3

Ejemplo 13. Dada la siguiente matriz $A_{3 \times 3}$, encuentre su matriz de A^c .

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Solución:

Ahora se tiene que encontrar nueve elementos de la matriz de cofactores, es decir:

$$A^c = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} \end{bmatrix}$$

Por tanto:

$$ca_{11}(-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} = +(45 - 32) = 13; ca_{12}(-1)^{1+2} \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} = -(54 - 28) = -26;$$

$$ca_{13}(-1)^{1+3} \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} + (48 - 35) = 13; ca_{21}(-1)^{2+1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} = -(19 - 24) = -(-6) = 6;$$

$$ca_{22}(-1)^{2+2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{bmatrix} + (9 - 21) = -12; ca_{23}(-1)^{2+3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = -(8 - 14) = -(-6) = 6;$$

$$ca_{31}(-1)^{3+1} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} + (8 - 15) = -7; ca_{32}(-1)^{3+2} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} = -(4 - 18) = -(-14) = 14;$$

$$ca_{33}(-1)^{3+3} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{bmatrix} + (5 - 12) = -7$$

Al final los elementos de la matriz de cofactores son:

$$A^c = \begin{bmatrix} 13 & -26 & 13 \\ 6 & -12 & 6 \\ -7 & 14 & -7 \end{bmatrix}$$

Nota. Si nos pidieran encontrar el determinante de la matriz por cofactores se tiene que multiplicar los valores de filas y columnas correspondientes de la matriz inicial y de la de cofactores.

$$(1)(13) + 2(-26) + (3)(13) = 13 - 52 + 39 = 0;$$

$$(6)(6) + (5)(-12) + (4)(6) = 36 - 60 + 24 = 0;$$

(7)(-7) + (8)(14) + (9)(-7) = -49 + 112 - 63 = 0; por lo tanto, se demuestra que el determinante por cofactores es igual a cero; y los elementos de la matriz de cofactores son los correctos

Reducción por cofactores

Otra forma de encontrar el determinante de una matriz es aplicando el reducido por cofactores, es decir se puede también trabajar con cualquier fila o columna para encontrar el determinante de una matriz que se va a expandir.

Ejemplo:

Dada la siguiente matriz, encuentre su determinante aplicando el reducido por cofactores.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 6 & 5 & 4 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Solución: se toma como pivote cualquier fila o columna y se siguen los pasos anteriores.

Empecemos con la fila 1 como pivote; se tiene:

$$1(-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} = 1(45 - 32) = 13 + 2(-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -2(54 - 28) = -2(26) = -52$$

$$3(-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 3(48 - 35) = 3(13) = 39; \text{ entonces se tiene } 13 - 52 + 39 = 0$$

$\det(A)=0$, por tanto, se calcula de forma más fácil su determinante.

1.9. PROPIEDAD DE LOS DETERMINANTES

Las siguientes propiedades son verdaderas, siempre y cuando la matriz sea cuadrada.

Propiedad 1: si una matriz A, cualquiera, tiene una fila (o una columna) de ceros, el determinante de A es cero.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Sea desarrollando por cofactores del primer renglón, se tiene:

$$\det A = (0) \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - (0) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + (0) \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0$$

Propiedad 2: el determinante de una matriz A es igual al determinante de la transpuesta de A.

$$\det A = \det A^t$$

Ejemplo

Dada la siguiente matriz, verifique que A cumple con la propiedad 2.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}; \det A = (1)(5) - (3)(2) = -1$$

La transpuesta de A es:

$$A^t = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}; \det A = (1)(5) - (2)(3) = -1$$

Por tanto, cumple la propiedad

Propiedad 3: si en una matriz se intercambian dos renglones (o dos columnas) de una matriz A, entonces el determinante cambia de signo.

Ejemplo:

Sea la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

Encontramos su determinante aplicando reducción de cofactores; por lo tanto, mantenemos la columna 1 como pivote de la siguiente manera:

$$\det A = 0 \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = 0 + (-4)[(3)(7) - (2)(-2)] + 0 = -4(25) = -100$$

Verificar la propiedad: definimos la matriz B que se regenera al intercambiar los renglones 1 y 2, de A:

$$B = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det B = 4 \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} - 0 \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = (4)[(3)(7) - (2)(-2)] + 0 + 0 = 4(25) = 100$$

Así, cumple la propiedad 3 donde el $\det(A)$ es igual al $\det(-A)$

Propiedad 4: si una matriz A tiene dos renglones (o dos columnas) iguales o es múltiplo de cualquier fila o columna, entonces $\det A = 0$.

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Mantenemos como pivote la columna 3 de la siguiente manera:

$$\det A = 0 \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 7 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 0 + (-7)[(1)(-2) - (1)(-2) + 0] + 0 = 0$$

Cumple la propiedad 4.

Propiedad 5: si, en una matriz, un solo renglón (o columna) de A se multiplica por un escalar r cualquiera, el determinante de la matriz resultante es r veces el determinante de A, $r \det(A)$.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}; \det A = -100$$

Multiplicando el tercer renglón de A por el escalar $r = 3$ se tiene la matriz B.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 6 & 21 \end{bmatrix}$$

Cuyo determinante, desarrollado por cofactores de la primera columna de B es:

$$\det B = (-4) \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & 21 \end{vmatrix} = (-4)[(3)(21) - (6)(-2)] = (-4)(75) = -300 = 3 \det A$$

Propiedad 6: si un renglón de la matriz $A=(a_{ij})$ se multiplica por un escalar r y se suma a otro renglón de A, es decir $(ra_{11} + a_{21}; ra_{12} + a_{22}; ra_{13} + a_{23})$, el $\det(A) = \det(B)$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\det A = -100$$

Multiplicando la segunda columna de A por el escalar 2 y sumándola a la columna 3, se obtiene la matriz B siguiente:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 3 & (2)(3) - 2 \\ 4 & -1 & (2)(-1) + 3 \\ 0 & 2 & (2)(2) + 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 11 \end{bmatrix}$$

Tomando como pivote la columna 1, se tiene:

$$\det B = (-4) \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = (-4)[(3)(11) - (2)(4)] = (-4)(25) = -100 = \det A$$

Propiedad 7: si A y B son matrices de nxn, el determinante producto AB es igual al producto de los determinantes de A y de B.

Esto quiere decir: $\det(AB) = \det A * \det B$

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\det A = (1)(5) - (3)(2) = -1$$

$$\det B = (4)(3) - (2)(5) = 2$$

El producto:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1)(4) + (2)(2) & (1)(5) + (2)(3) \\ (3)(4) + (5)(2) & (3)(5) + (5)(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 11 \\ 22 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\det AB = (8)(30) - (22)(11) = 240 - 242 = -2$$

Entonces:

$$\det(AB) = -2 = (-1)(2) = \det A \det B$$

Propiedad 8: el determinante de la matriz identidad I es igual a 1 (uno).

Ejemplo:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(I) = (1)(1) - (0)(0) = 1$$

Propiedad 9: el determinante de una matriz singular, es decir, que no tiene inversa, es igual a 0 (cero).

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -3 & -12 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (1)(-12) - (-3)(4) = -12 + 12 = 0$$

Uso de las propiedades para calcular determinantes de orden $n > 3$

Al utilizar las operaciones elementales sobre renglones, se puede reducir un determinante a una forma más fácil de evaluar. Si se reduce a una forma triangular superior o inferior, el determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal. Puesto que, al encontrar el determinante de una matriz, se tomará en cuenta las propiedades indicadas anteriormente.

Ejemplo:

Calcular el determinante de la matriz A de 4x4

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Simplificamos el cálculo del determinante de A reduciendo por renglones.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{14}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\begin{matrix} -3R_1 + R_2 \\ -2R_1 + R_4 \end{matrix}} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -10 & -5 & -6 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Entonces, permutamos o cambiamos la fila 1 con la fila 4, P14 cambia el signo de $\det(A)$, las operaciones $-3R_1 + R_2$ y no cambian el valor del determinante. De esta forma:

$$\det A = (-1) \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -10 & -5 & -6 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Se podría seguir reduciendo a la forma triangular, pero observando que hay varios ceros en el tercer renglón resulta directo desarrollar por cofactores, primero de la primera columna, y después del tercer renglón:

$$|A| = (-1)(1) \begin{vmatrix} -10 & -5 & -6 \\ 2 & 4 & 1 \\ -6 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)(1)(-6) \begin{vmatrix} -5 & -6 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = (-1)(1)(-6)[(-5)(1) - (4)(-6)] = 114$$

Otra forma de calcular el determinante de la matriz 4x4 es aplicando la técnica del cofactor menor o reducido de la siguiente forma:

Partimos de la matriz siguiente.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Vamos a mantener como pivote la fila 1, puede ser pivote la fila 3 porque hay un elemento en cada fila que contiene cero.

$$\begin{aligned} & 2(-1)^{1+1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} + 0(-1)^{1+2} \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + 4(-1)^{1+3} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \\ & + 4(-1)^{1+4} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Ahora cada matriz 3x3 se desarrolla por cofactor menor también de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} 2 \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} &= 2 \left[0 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + (-1) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right] \\ &= 2(0 + (-1)(-2 - 3) + 2(-4 - 2)) = 2(5 - 12) = -14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4 \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} &= 4 \left[3 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + (1) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right] = 4(3(4 - 3) + 1(-1) + 0) \\ &= 4(3 - 1) = 8 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -4 \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} &= -4 \left[3 \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + (0) \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \right] \\ &= 4(3(4 - 12) + 0 + 1(-4 - 2)) = 4(-24 - 6) = 120 \end{aligned}$$

Por lo tanto, sumando el resultado de cada matriz se tiene:

$$|A| = (-14 + 0 + 8 + 120) = 114$$

Nota. Existe otra forma de hallar el determinante de una matriz de orden $n > 3$. Es encontrando la matriz triangular superior, inferior porque se multiplica los elementos de su diagonal principal cuando se encuentra, ya que su resultado es igual a su determinante. Se deja al lector que pueda encontrar su solución.

1.10. APLICACIÓN DE LOS DETERMINANTES

Para encontrar el área de cualquier triángulo en general, la fórmula es la siguiente

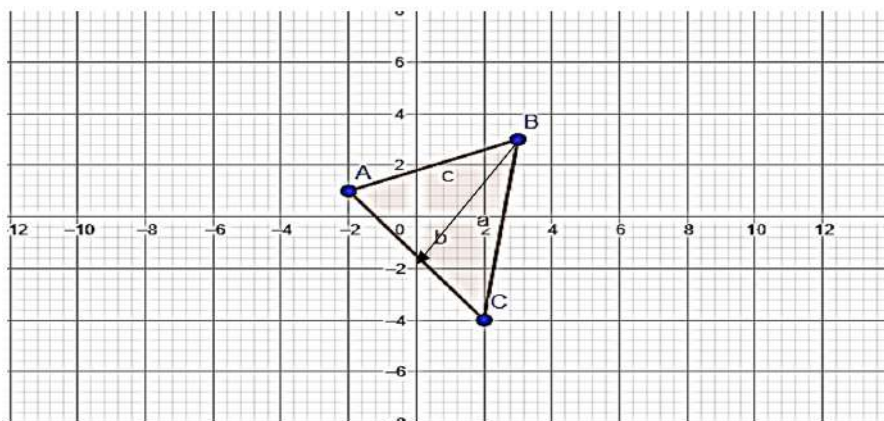
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Ejemplo:

Dado los siguientes vértices $A = (-2, 1)$; $B = (3, 3)$ y $C = (2, -4)$, halle su área:

Solución: primero graficamos sus vértices de la siguiente manera:

Figura 1.9. Representación de un triángulo



Fuente: GeoGebra

Hallamos la distancia AC aplicando la fórmula de distancia entre dos puntos:

$$d(AC) = \sqrt{(-2 - 2)^2 + (1 + 4)^2} = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41} = \text{base}$$

Luego, la distancia BD; pero, para ello, hallamos primero la pendiente AC:

$$m(AC) = \frac{-4 - 1}{2 + 2} = \frac{-5}{4}$$

La pendiente BD es igual a la perpendicular de AC, que es $m(BD) = \frac{4}{5}$: ahora encontramos las ecuaciones de las rectas AC y BD para hallar el punto D.

$$E. \text{ Recta AC} = y - 1 = \frac{-5}{4}(x + 2); 4y - 4 = -5x - 10 = 5x + 4y = -6;$$

$$E. \text{ Recta BD} = y - 3 = \frac{4}{5}(x - 3); 5y - 15 = 4x - 12 = 4x - 5y = -3;$$

Ahora encontramos los valores de las variables x, y;

$$\text{Así: } x = \frac{-42}{41}; y = \frac{-9}{41};$$

Ahora encontramos la distancia entre los puntos BD;

$$d(BD) = \sqrt{\left(3 + \frac{42}{41}\right)^2 + \left(3 + \frac{9}{41}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{165}{41}\right)^2 + \left(\frac{132}{41}\right)^2} = \frac{1}{41} \sqrt{27225 + 17424} = \frac{1}{41} \sqrt{44649} = \frac{1}{41} \sqrt{33^2 \cdot 41};$$

$$d(BD) = \frac{1}{41} 33\sqrt{41} = \text{altura}$$

Reemplazamos en la fórmula del área de un triángulo y se tiene:

$$A = \frac{\sqrt{41} \cdot 33 \sqrt{41}}{2 \cdot 41} = \frac{33}{2}$$

Ahora apliquemos la siguiente relación sobre determinantes para encontrar el área de cualquier triángulo que es:

$$\text{Area} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

Ejemplo: si tomamos los vértices del triángulo anterior, se tienen los vértices A = (-2, 1); B = (3, 3) y C = (2, -4). Halle su área:

Solución: indicando que, para A = (-2, 1) se tiene: $x_1 = -2$; $y_1 = 1$; B = (3, 3); $x_2 = 3$; $y_2 = 3$; y para C = (2, -4): $x_3 = 2$; $y_3 = -4$; reemplazando en el área se tiene:

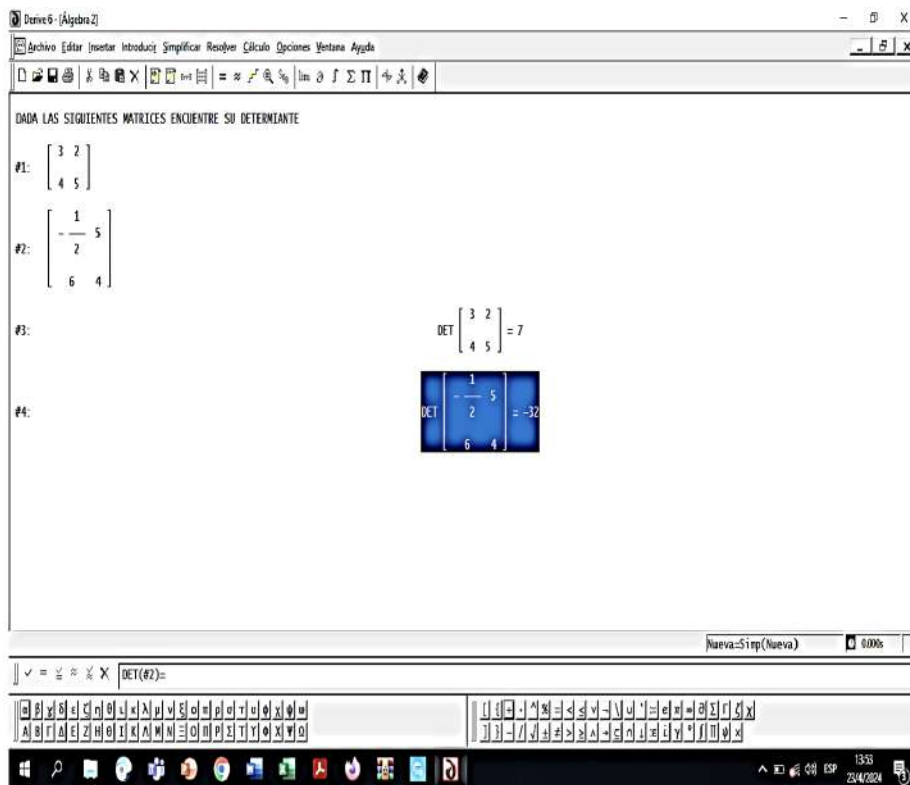
$$\begin{aligned} \text{Area} &= \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \left[(-2) \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} \right] \\ &= \pm \frac{1}{2} [-2(3 + 4) - 1(3 - 2) + 1(-12 - 6)] = \pm \frac{1}{2} [-14 - 1 - 18]; A \\ &= \frac{33}{2} \end{aligned}$$

Nota. Como se indica, la solución es la misma que se utilizó en forma tradicional para hallar el área de cualquier triángulo, pero, al aplicar el área por determinantes, se simplifican los cálculos y se llega al mismo resultado.

Aplicación de los determinantes con el programa Derive 6.0

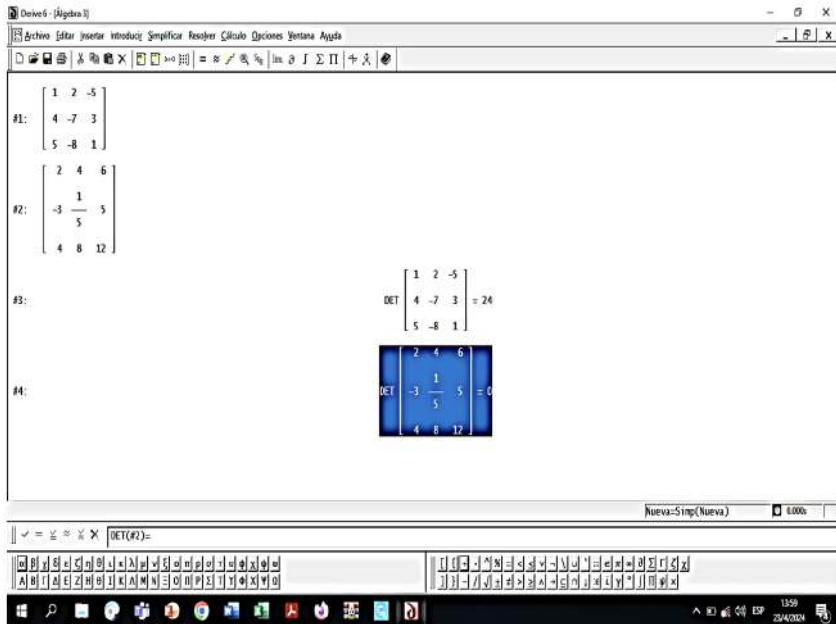
Se utilizará el programa el Derive 6.0 como se lo hizo para matrices:

Figura 1.10. Solución determinante orden 2x2



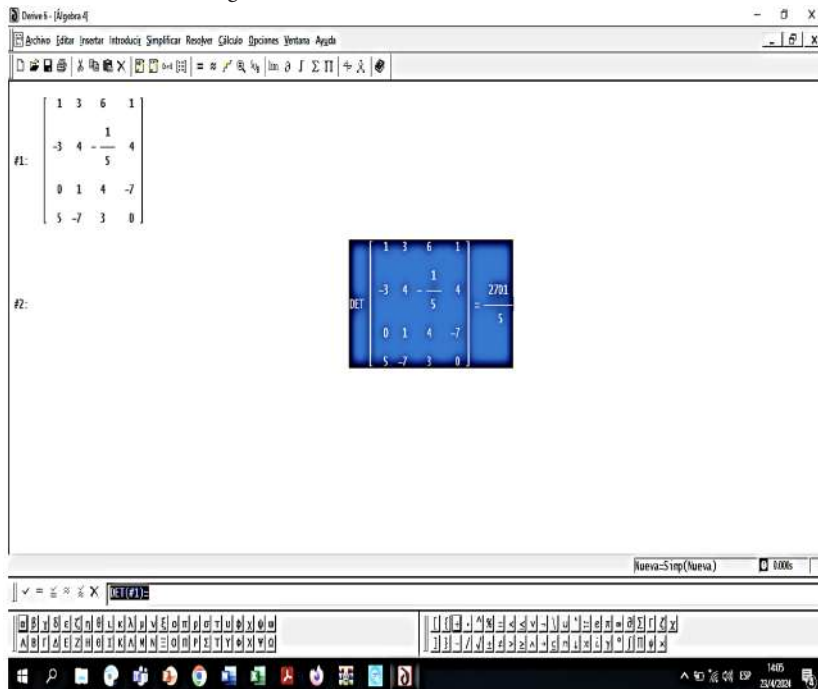
Fuente: Derive 6.0

Figura 1.11. Solución determinante orden 3x3



Fuente: Derive 6.0

Figura 1.12. Solución determinante orden > 3



Fuente: Derive 6.0

Nota. Las determinantes se convierten en herramientas fundamentales para calcular el área de un paralelogramo o el volumen de un paralelepípedo en el espacio tridimensional. Esta aplicación demuestra la versatilidad de las determinantes al extender su influencia más allá de los límites algebraicos, para abarcar conceptos geométricos fundamentales.

1.11. EJERCICIOS

1.- Dada la siguiente matriz, calcular la matriz triangular superior con los cuatros pasos conocidos y compruebe su resultado:

a.-

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 5 & -4 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

b.- Dada la siguiente matriz, calcular la matriz triangular inferior con los cuatros pasos conocidos y compruebe su resultado:

$$B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1/5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

c.- Dada la siguiente matriz, calcular la matriz diagonal con los cuatros pasos conocidos y compruebe su resultado:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & 4 & -8 \\ 2 & 1/2 & 2 \\ -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

2.- Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Encuentre:

a. $3B - 1/2A + 3C$

b. $A \cdot B; B \cdot A$

c. $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

d. $f(A) = 3A^2 + 2A - 5$

3.- Dadas las siguientes matrices, halle su determinante y compruebe su resultado aplicando las técnicas conocidas.

a. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$

b. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 5 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & -7 \\ 4 & 5 & 1 \end{bmatrix} C = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{bmatrix}$

c. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 4 \\ 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

4.- Dadas las siguientes matrices, halle su determinante aplicando cofactores.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -5 \\ -3 & 3 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ \frac{1}{2} & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

CAPÍTULO II

2. LA INVERSA Y LOS SISTEMAS DE ECUACIONES

2.1. LA INVERSA DE UNA MATRIZ

Definición. Una matriz inversa es una matriz cuadrada que, al multiplicarse por otra matriz, da como resultado la matriz identidad. Se representa de la siguiente manera A^{-1} y debe cumplir:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

Por lo tanto, la matriz inversa cumple la propiedad conmutativa, la misma que se demostrará más adelante.

Una de las propiedades de la matriz inversa. La inversa del producto de dos matrices es el producto de las inversas de las matrices cambiando el orden.

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Ejemplo 1

Dadas las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}; \text{ encuentre la propiedad indicada:}$$

Solución: primero multiplicamos las matrices A y B de la siguiente manera:

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} 1(-1) + 3(3) & 1(2) + 3(-2) \\ 4(-1) + (-2)(3) & 4(2) + (-2)(-2) \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -10 & 12 \end{bmatrix}$$

Luego encontramos su inversa por cofactores: $(A \cdot B)^{-1}$

$$c_{11}=12; c_{12}=10; c_{21}=4; c_{22}=8; \det(C) = (8)(12) - (-10)(-4) = 96 - 40 = 56;$$

$$(C)_c = \begin{bmatrix} 12 & 10 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}; \text{ ahora } (C)_c^T = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$$

Aplicamos la fórmula de la inversa por cofactores y se tiene:

$$C^{-1} = \frac{1}{|C|} \cdot (C_c)^T$$

Así se tiene que la inversa es: $C^{-1} = (A * B)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{12}{56} & \frac{4}{56} \\ \frac{10}{56} & \frac{8}{56} \end{bmatrix}$

Ahora calculamos B^{-1} y A^{-1} : $\det(B) = (-1)(-2) - 3(2) = -4$; $\det(A) = 1(-2) - 4(3) = -14$

Por cofactores $B_c = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$; $(B)_c^T = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$; $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{-4} & \frac{-2}{-4} \\ \frac{-3}{-4} & \frac{-1}{-4} \end{bmatrix}$;

Por cofactores $A_c = \begin{bmatrix} -2 & -4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$; $(A)_c^T = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$; $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{-14} & \frac{-3}{-14} \\ \frac{-4}{-14} & \frac{1}{-14} \end{bmatrix}$;

Ahora multiplicamos $B^{-1} \cdot A^{-1}$: $B^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{4} & \frac{2}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$; $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{14} & \frac{3}{14} \\ \frac{4}{14} & \frac{-1}{14} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12}{56} & \frac{4}{56} \\ \frac{10}{56} & \frac{8}{56} \end{bmatrix} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;
por lo tanto cumple que:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

2.2. FORMAS DE DETERMINAR LA INVERSA DE UNA MATRIZ

Existe dos formas de encontrar la inversa de una matriz: **procedimiento gaussiano** y **método de cofactores**, conocido también como el adjunto.

2.2.1. Procedimiento gaussiano

Se llama matriz inversa de una matriz cuadrada A , y se expresa A^{-1} , a la única matriz que cumple la siguiente relación.

- i. La matriz debe ser cuadrada.

- ii. Para calcular la inversa de una matriz cuadrada A , se tiene que aplicar el método de Gauss, que significa construir, en primer lugar, la matriz $(A|I)$, siendo I la matriz identidad del mismo orden que A . Después de realizar diversas operaciones sobre las filas de esta nueva matriz. Tendremos que conseguir que se transforme en la siguiente $(I|B)$. La matriz B será la inversa de la matriz A , es decir: $B = A^{-1}$.
- iii. Si se encuentra la inversa de una matriz por G-J, se cumple la siguiente relación $A \cdot A^{-1} = I = A^{-1} \cdot A$ se cumple la propiedad conmutativa. Es decir, la matriz inversa de A es la única matriz que al multiplicarla por ella da la matriz identidad del orden correspondiente.
- iv. No toda matriz cuadrada posee su inversa. Para que exista, es condición necesaria y suficiente que el determinante de la matriz sea distinto de cero.

$$\exists A^{-1} \leftrightarrow |A| \neq 0$$

Aunque existe otro procedimiento para calcular la inversa a través de transformaciones elementales (Método de Gauss), la fórmula con la que se calcula la matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^c)^T$$

Nota. Si existe la matriz inversa de A , se dice que la matriz A es inversible o regular. En caso contrario, se dice que la matriz A es singular.

Ejemplo 2

Dada la siguiente matriz, encuentre su inversa aplicando Gauss-Jordan:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución: primero representamos la matriz A con su aumentada que es la matriz identidad porque es de orden 3×3 . El objetivo es convertir la matriz A en matriz identidad. Entonces, los elementos de la matriz identidad, luego de desarrollar entre filas, esa será la matriz inversa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}$$

Solución: vamos a convertir -2 y 3 en cero de la siguiente manera:
($a_{21} = -2$, $a_{31} = 3$)

$$f_2 \rightarrow 2f_1 + f_2; \text{ se tiene: } \begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array} \quad f_3 \rightarrow -3f_1 + f_3; \text{ se tiene: } \begin{array}{cccccc} -3 & -6 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -6 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -1 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 & 5 \end{array} \right) \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}$$

Continuando con el análisis, vamos a convertir -6, que está en la fila 3, en cero. Se tiene:

$$f_3 \rightarrow 6f_2 + 5f_3 \text{ se tiene: } \begin{array}{cccccc} 0 & 30 & 6 & 12 & 6 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & -15 & 0 & 5 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -3 & 6 & 5 \end{array}$$

$$f_2 \rightarrow -f_3 + f_2; \text{ se tiene: } \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & -1 & 3 & -6 & -5 \\ 0 & 5 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 5 & 0 & 5 & -5 & -5 \end{array}$$

Los elementos de la nueva fila 2 los multiplicamos por la fila dos por $\left(\frac{1}{5}\right)$; se tiene

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 & 5 \end{array} \right) \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix} ; \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 6 & 5 \end{array} \right) \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}$$

Por último, nos falta convertir 2 que se encuentra en la fila 1, para obtener la matriz identidad:

$$f_1 \rightarrow -2f_2 + f_1 \text{ se tiene: } \begin{array}{cccccc} 0 & -2 & 0 & -2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1 & 2 & 2 \end{array}$$

Al final se tiene:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Se tiene, por último, la comprobación si la matriz inversa es la correcta, multiplicando la siguiente relación:

$$A * A^{-1} = A^{-1} * A = I$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejemplo 3

Dada la siguiente matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Encuentre la inversa por aplicando el método de *Gauss-Jordan*

Solución: a la matriz A de nuestro ejemplo, le aplicamos la relación (A|I) para encontrar la matriz inversa de la matriz realizando operaciones entre renglones o filas.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 = F_1 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} F_3 = F_3 + F_1 \\ F_2 = F_2 - F_1 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{F_2 = F_2 + 2F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

La matriz inversa de A es $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Comprobación:

Se multiplica la matriz A por su inversa A^{-1} , para verificar que $A \cdot A^{-1} = I$. En efecto

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2.2.2. Método de cofactores

Otra de las técnicas para encontrar la matriz inversa es por cofactores, llamada también el adjunto. Sea A una matriz cuadrada, A y regular (es decir de determinante no nulo), entonces A verifica la siguiente propiedad.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^c)^T$$

Por tanto, esta es la relación para encontrar la matriz inversa por cofactores (adjunta).

Los pasos para calcular la matriz inversa son los siguientes:

- Hallamos el determinante de A . Solo si no es nulo, podemos continuar.
- Creamos una nueva matriz con los menores complementarios de cada elemento.

Ejemplo 4

Dada la siguiente matriz encuentre su inversa por cofactores:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: primero hallamos el determinante de la matriz A . Si no es nulo, podemos continuar.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \text{ aplicamos Sarrus. Se tiene } (0 + 0 + 4) - (0 - 4 + 0) = 8$$

Otra forma reducida por cofactores, manteniendo la fila 3:

$$|A| = \left[0 \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + (-2) \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + 0 \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right] = 0 + 8 + 0 = 8$$

En este caso, vemos que no es nulo; por tanto, es una matriz regular y podemos calcular su inversa.

Creamos una nueva matriz con los menores complementarios de cada elemento o los elementos de la matriz de cofactores:

$$\text{Menores de A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \end{bmatrix}$$

Para calcular la matriz, debemos resolver los determinantes de cada uno de los menores.

Cambiamos los signos correspondientes para obtener la matriz adjunta.

$$\text{Adj A} = \begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix} \quad \text{Adj A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 10 \end{pmatrix}$$

Ya tenemos la matriz adjunta de A

Calculamos la matriz traspuesta de la adjunta

$$\text{Adj A}^T = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 4 & -4 & 10 \end{pmatrix}$$

Así, tenemos la matriz traspuesta. Ya solo nos queda el último paso y tendremos nuestra matriz inversa.

Dividimos la matriz resultante por el determinante de A, que es 8

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 5/4 \end{pmatrix}$$

Con esto, hemos terminado nuestro ejemplo y hemos encontrado la solución a nuestra actividad. Para la comprobación, se multiplica la matriz $A \cdot A^{-1}$ y se tiene:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 5/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nota: La matriz de cofactores se conoce también como la adjunta de la matriz, indicando que los elementos de $A_c = \text{Adj A}$.

2.3. LA INVERSA Y LOS SISTEMAS DE ECUACIONES

Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas $x_1, x_2, \dots, x_n$ con coeficientes en un cuerpo K (como los reales o los complejos) se representa de la siguiente forma:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

Es un sistema de ecuaciones generalizado, siendo $a_{ij} \in K$ el coeficiente de la incógnita x_j de la ecuación i y $b_i \in K$ el término independiente de la ecuación $i=1, \dots, m$

Se define la matriz de coeficientes del sistema anterior como

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Y la matriz de incógnitas, x , y de términos independientes, b , lo podemos representar así:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, se tendrá la siguiente relación: $A \cdot X = b$; así para hallar la solución de cualquier sistema de ecuaciones la relación será la siguiente:

$$A \cdot A^{-1} \cdot X = A^{-1} \cdot b$$

Multiplicamos para ambos miembros por A^{-1} , ya que queremos despejar la variable general X , para obtener la relación final del sistema de ecuaciones.

I. $X = A^{-1} \cdot b$; así la relación final es:

$$X = A^{-1} \cdot b$$

Técnicas y métodos para identificar los sistemas de ecuaciones

Según el número de soluciones, clasificamos un sistema de ecuaciones lineales (SEL) en:

- **Sistema incompatible (SI):** no tiene soluciones.
- **Sistema compatible determinado (SCD):** tiene una única solución.
- **Sistema compatible indeterminado (SCI):** tiene más de una solución (en este caso, tiene infinitas soluciones).

Destacamos cuatro métodos para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales:

1. **Eliminación de Gauss:** consiste en realizar operaciones elementales entre filas para encontrar la matriz inversa por G-J. Luego hallamos la solución.
2. **Gauss reducido:** aplicando la matriz aumentada en forma similar a la primera relación.
3. Método de la matriz inversa por **cofactores**.
4. **Regla de Cramer:** si el SEL es compatible determinado, se obtiene la solución calculando unos cuantos determinantes.

2.4. RESOLUCIÓN DE SISTEMA DE ECUACIONES APLICANDO LA ELIMINACIÓN DE GAUSS-JORDAN, A TRAVÉS DE EJEMPLOS

Eliminación de Gauss: para este método nos basamos en la relación siguiente.

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Ejemplo 5

Dado el siguiente sistema de ecuaciones, encontrar su solución aplicando el método de Gauss-Jordan, y compruebe su resultado.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Solución

Al aplicar Gauss-Jordan, se tiene que encontrar primero la matriz inversa que se refirió en la página 56.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & -5 & -2 & 0 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 20 & -55 & 5 \end{array}\right)$$

$$F2: -2f1+5f2$$

$$f3: -2f1+5f3$$

$$f3: -11f2+f3$$

$$\begin{array}{cccccc} -10 & -4 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} -10 & -4 & 0 & -2 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & -11 & 55 & 22 & -55 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 10 & 5 & -5 & 0 & 5 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 10 & 15 & -5 & 0 & 0 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 11 & -5 & -2 & 0 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & -5 & -2 & 5 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 11 & -5 & -2 & 0 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 50 & 20 & -55 & 5 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 50 & 20 & -55 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 50 & 20 & -55 & 5 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -25 & 0 & 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 50 & 20 & -55 & 5 \end{array}\right)$$

$$F2: 10f2+f3$$

$$f1: -5f1+f2$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 10 & -50 & -20 & 50 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} -25 & -10 & 0 & -5 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 50 & 20 & -55 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 10 & 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 10 & 0 & 0 & -5 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} -25 & 0 & 0 & -5 & -5 & 5 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -25 & 0 & 0 & -5 & -5 & 5 \\ 0 & 10 & 0 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 50 & 20 & -55 & 5 \end{array}\right) ; = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{11}{10} & \frac{1}{10} \end{array}\right)$$

Se desarrolla la matriz a través de la reducción de valores entre filas. Se multiplican la fila 1, fila 2 y fila 3 de la siguiente manera: $-1/25f1$, $1/10 f2$ y $1/50f3$, para encontrar su matriz identidad.

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & -\frac{11}{10} & \frac{1}{10} \end{array}\right); \text{ así, encontramos la matriz inversa}$$

Para hallar la solución del sistema de ecuaciones, una vez que se encontró la matriz inversa, se multiplica por los valores independientes del sistema y se reemplaza en la relación que se indica:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{5} & -\frac{11}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ \frac{3}{2} \\ \frac{11}{10} \end{bmatrix} =$$

Así se tiene que:

$$x_1 = -\frac{1}{5} \quad x_2 = \frac{3}{2} \quad x_3 = \frac{11}{10}$$

Por último, se deben reemplazar los valores de las variables en el sistema de ecuaciones para verificar si se cumplen las igualdades.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

$$5\left(-\frac{1}{5}\right) + 2\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \leftrightarrow -1 + 3 = 2$$

$$2\left(-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{11}{10}\right) \leftrightarrow \frac{-4 + 15 - 11}{10} = 0$$

$$2\left(-\frac{1}{5}\right) + 3\left(\frac{3}{2}\right) - \left(\frac{11}{10}\right) \leftrightarrow \frac{-4 + 45 - 11}{10} = 3$$

Sistema de ecuaciones aplicando Gauss-Jordan reducido

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

La solución se encuentra de manera similar al método anterior, con el cambio de que, para hallar las variables x_1, x_2, x_3 , se desarrolla directamente: es decir, en la matriz del sistema, se aumentan los valores independientes del vector b de la siguiente forma.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{array} \right) \begin{matrix} \frac{1}{5}f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}$$

Multiplicamos la primera fila 1 por 1/5: para que el primer valor sea la unidad.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{array} \right) \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}$$

Sumamos a la segunda y tercera fila la primera multiplicada por -2:

$$\begin{array}{rcl} f_2 \rightarrow -2f_1 + f_2 \text{ se tiene:} & \begin{array}{cccc} -2 & -4/5 & 0 & -4/5 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \end{array} & \\ & \hline & \begin{array}{cccc} 0 & 1/5 & -1 & -4/5 \end{array} & \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} f_3 \rightarrow -2f_1 + f_3 \text{ se tiene:} & \begin{array}{cccc} -2 & -4/5 & 0 & -4/5 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{array} & \\ & \hline & \begin{array}{cccc} 0 & 11/5 & -1 & 11/5 \end{array} & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & \frac{1}{5} & -1 & \frac{-4}{5} \\ 0 & \frac{11}{5} & -1 & \frac{11}{5} \end{array} \right) \begin{matrix} f_1 \\ 5f_2 \\ 5f_3 \end{matrix}$$

Ahora, a las filas 2 y 3, las multiplicamos por 5. Se tiene:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & -5 & -4 \\ 0 & 11 & -5 & 11 \end{array} \right) \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}$$

Sumamos a la segunda fila la tercera multiplicada por -1:

$$\begin{array}{rcl} f_2 \rightarrow -f_3 + f_2 \text{ se tiene:} & \begin{array}{cccc} 0 & -11 & 5 & -11 \\ 0 & 1 & -5 & -4 \end{array} & \\ & \hline & \begin{array}{cccc} 0 & -10 & 0 & -15 \end{array} & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & -10 & 0 & -15 \\ 0 & 11 & -5 & 11 \end{array} \right) \begin{matrix} f_1 \\ -\frac{1}{10}f_2 \\ \frac{1}{11}f_3 \end{matrix}$$

Multiplicamos la segunda fila por -1/10 y la tercera por 1/11:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{-5}{11} & \frac{2}{11} \end{array} \right) \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{matrix}$$

Sumamos a la primera fila la segunda multiplicada por $-2/5$

$$f_1 \rightarrow -2/5 f_2 + f_1 \text{ se tiene: } \begin{array}{cccc} 0 & -2/5 & 0 & -3/5 \\ 1 & 2/5 & 0 & 2/5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -1/5 \end{array}$$

$$f_3 \rightarrow -f_2 + f_3 \text{ se tiene: } \begin{array}{cccc} 0 & -1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & -5/11 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -5/11 & -1/2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 11 & -1/2 \end{array} \right) \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ -11/5 f_3 \end{array}$$

Multiplicamos la tercera fila por $-11/5$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/10 \end{array} \right) \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array}$$

Por lo tanto, la solución del sistema de ecuaciones es: $x_1 = -\frac{1}{5}$ $x_2 = \frac{3}{2}$ $x_3 = \frac{11}{10}$; que son los mismos valores que encontramos al aplicar Gauss-Jordan.

Nota. La matriz que se encontró tiene forma escalonada reducida (es la matriz identidad). Realmente, ya tenemos la solución del sistema, así que es un sistema compatible determinado.

No obstante, calculamos los rangos para promover buenas prácticas en los estudiantes

$$rg \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 11/10 \end{array} \right) \begin{array}{l} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{array} = 3;$$

$$rg \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = 3$$

El **teorema de Rouché-Frobenius** establece que, para que un sistema de ecuaciones lineales sea compatible, es condición necesaria y suficiente que la matriz formada por los coeficientes y la matriz ampliada por los términos independien-

tes posean el mismo rango. Por lo demás, el sistema constituido será determinado si su rango coincide con el número de incógnitas o será indeterminado si posee un valor menor a tal número.

Por tanto, el sistema es compatible determinado. La matriz obtenida proporciona la solución del sistema:

$$x_1 = -\frac{1}{5} \quad x_2 = \frac{3}{2} \quad x_3 = \frac{11}{10}$$

2.5. RESOLUCIÓN DE SISTEMA DE ECUACIONES APLICANDO EL MÉTODO DE COFACTORES

Para encontrar la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Se tiene que aplicar la relación:

$$x = A^{-1} \cdot b$$

Es decir, tenemos que encontrar la inversa de la matriz aplicando la técnica de la inversa de cofactores:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot (A^c)^T$$

Ejemplo 6

Dada la siguiente matriz halle su solución aplicando el método de cofactores:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución: se tiene que encontrar la inversa de la matriz aplicando cofactores, para lo cual primero encontramos los elementos de la matriz de cofactores referidas en la página 60.

$$a_{c11} = (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = -1 + 3 = 2; a_{c12} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -2 + 2 = 0;$$

$$a_{c13} = (-1)^{1+3} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 6 - 2 = 4; a_{c21} = (-1)^{2+1} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = -2 - 0 = -(-2) = 2;$$

$$a_{c22} = (-1)^{2+2} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -5 + 0 = -5; a_{c23} = (-1)^{2+3} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = 15 - 4 = -(11) = -11;$$

$$a_{c31} = (-1)^{3+1} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -2 - 0 = -2; a_{c32} = (-1)^{3+2} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = -5 + 0 = -(-5) = 5;$$

$$a_{c33} = (-1)^{3+3} \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = 5 - 4 = -1$$

Por tanto, la matriz de cofactores es:

$$A^c = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & -11 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$\det(A)$ = se multiplica la primera fila de la matriz A con la primera fila de la matriz de cofactores. Se tiene:

$$A^c = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & -11 \\ -2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$2(5) + 0(2) + 4(0) = 10$$

$$Ac^t = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & -5 & 5 \\ 4 & -11 & 1 \end{pmatrix} : 1/10 \text{ se tiene } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & -1/5 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 2/5 & -11/10 & 1/10 \end{pmatrix}$$

Por último, se multiplica por los términos independientes y se tiene:

$$\begin{pmatrix} 1/5 & 1/5 & -1/5 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 2/5 & -11/10 & 1/10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 3/2 \\ 11/10 \end{pmatrix}$$

Así, los valores de las variables son:

$$x_1 = -\frac{1}{5} \quad x_2 = \frac{3}{2} \quad x_3 = \frac{11}{10}$$

Por último, se deben reemplazar los valores de las variables en el sistema de ecuaciones para verificar si se cumplen las igualdades.

2.6. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES APLICANDO LA REGLA DE CRAMER

La Regla de Cramer es un método que se utiliza para resolver sistemas de ecuaciones por determinantes; es decir, permite resolver sistemas compatibles determinados (con una única solución) de cualquier dimensión. Se trata de un método de rápida aplicación debido a que solamente han de calcularse $n+1$ determinantes distintos para un sistema de dimensión $n \times n$. Todos los sistemas de Cramer son compatibles determinados. El valor de cada incógnita se obtiene dividiendo el determinante de la matriz asociada a dicha incógnita por la matriz del sistema (matriz de los coeficientes de las incógnitas). La siguiente relación nos permite indicar la determinante para todas las variables.

$$x_i = \frac{\text{Det}(A_i)}{\text{Det}(A)} \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} ; \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}} ;$$

$$x_3 = \frac{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & b_3 & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & b_n & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}} ; \dots ; x_n = \frac{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & b_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & b_n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}}$$

¿Se puede aplicar la Regla de Cramer para resolver sistemas de ecuaciones lineales compatibles que tengan más ecuaciones que incógnitas?

La respuesta es **afirmativa**. Basta con obtener un sistema equivalente al inicial eliminando las ecuaciones superfluas o dependientes (proporcionales, nulas o que sean combinación lineal de otras). El procedimiento que se debe seguir es el siguiente: supongamos que tenemos un sistema de **m ecuaciones lineales** con **n incógnitas**, siendo $m > n$ y tal que: **rango (A) = rango (A*) = n**. Por lo tanto, sobran **m – n ecuaciones**. Para averiguar cuáles son las ecuaciones de las que podemos prescindir, basta encontrar, en la **matriz de los coeficientes (A)**, un menor de orden n distinto de cero, por ejemplo, el que utilizamos para averiguar el rango de la matriz A. Las filas que intervienen en este menor son las que corresponden a las ecuaciones principales. Las restantes ecuaciones las podemos suprimir.

Ejemplo 7

Dada la siguiente matriz, encuentre su solución aplicando la Regla de Cramer

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

Solución: encontramos los determinantes para cada una de las variables de la siguiente manera:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & -1 & 3 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-2-6+6}{-5-4+15+4} = \frac{-2}{10} = \frac{-1}{5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-4+15+4}{-5-4+15+4} = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 2 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{15+12-4-12}{-5-4+15+4} = \frac{11}{10}$$

Son los valores que encontramos para $x_1 = -\frac{1}{5}$ $x_2 = \frac{3}{2}$ $x_3 = \frac{11}{10}$;

Al reemplazar los valores encontrados en el sistema de ecuaciones, se verifica la solución encontrada.

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3 \end{cases}$$

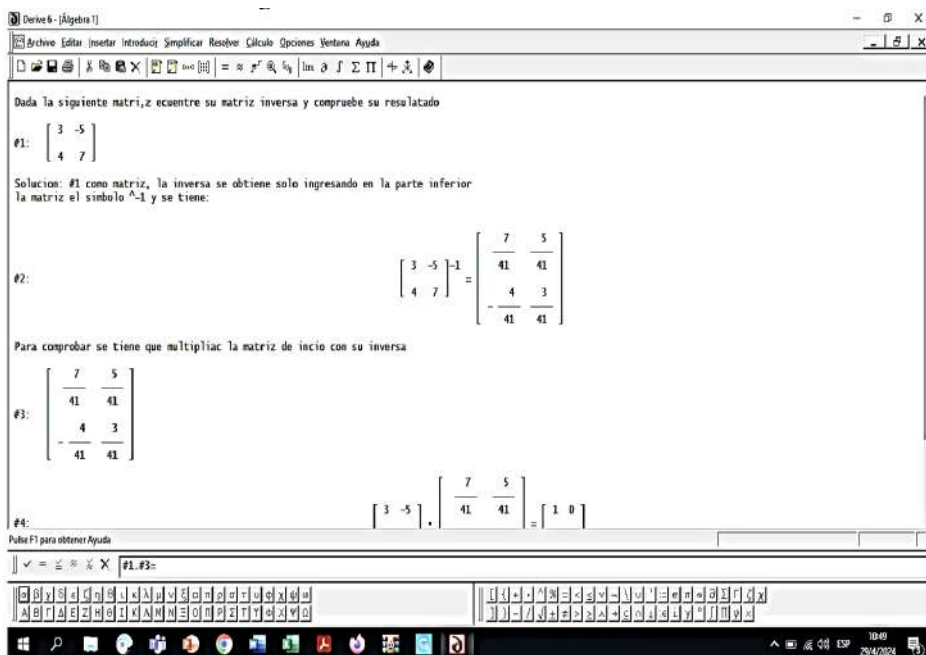
En la primera ecuación: $5(-1/5) + 2(3/2) = 2$; $-1+3=2$

En la segunda ecuación; $2(-1/5) + (3/2) - (11/10) = 0$

En la tercera ecuación; $2(-1/5) + 3(3/2) - (11/10) = 3$

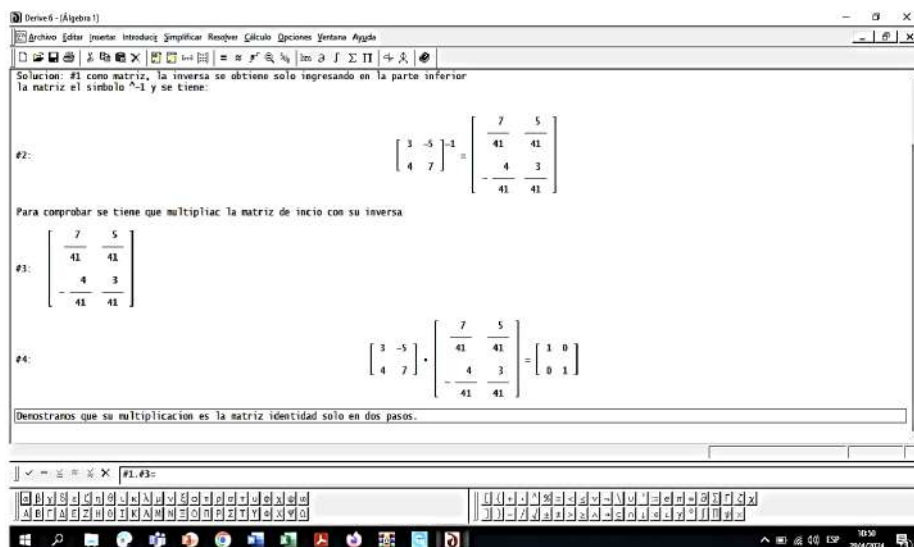
2.7. LA INVERSA DE UNA MATRIZ EN LA RESOLUCIÓN DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES CON EL PROGRAMA DERIVE 6.0

Figura 2.1. Inversa de una matriz orden 2x2



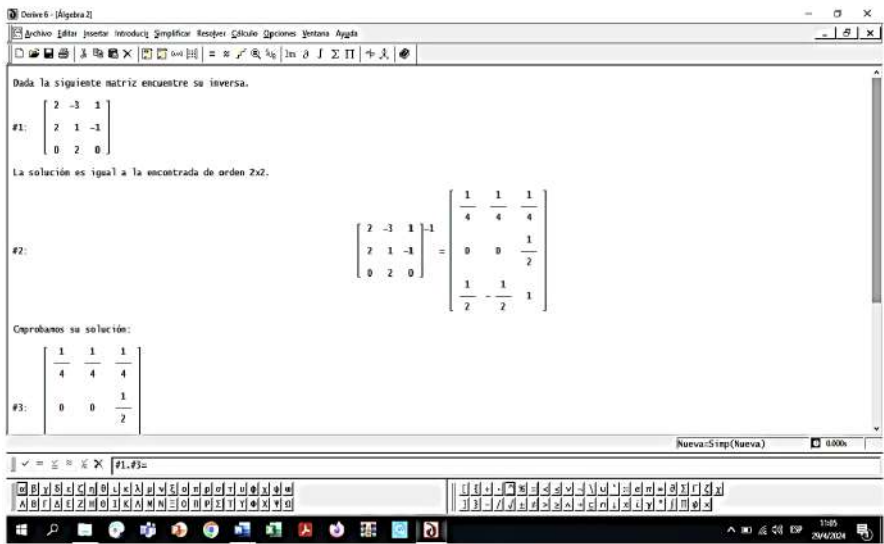
Fuente: Derive 6.0

Figura 2.2. Demostración de una matriz orden 2x2



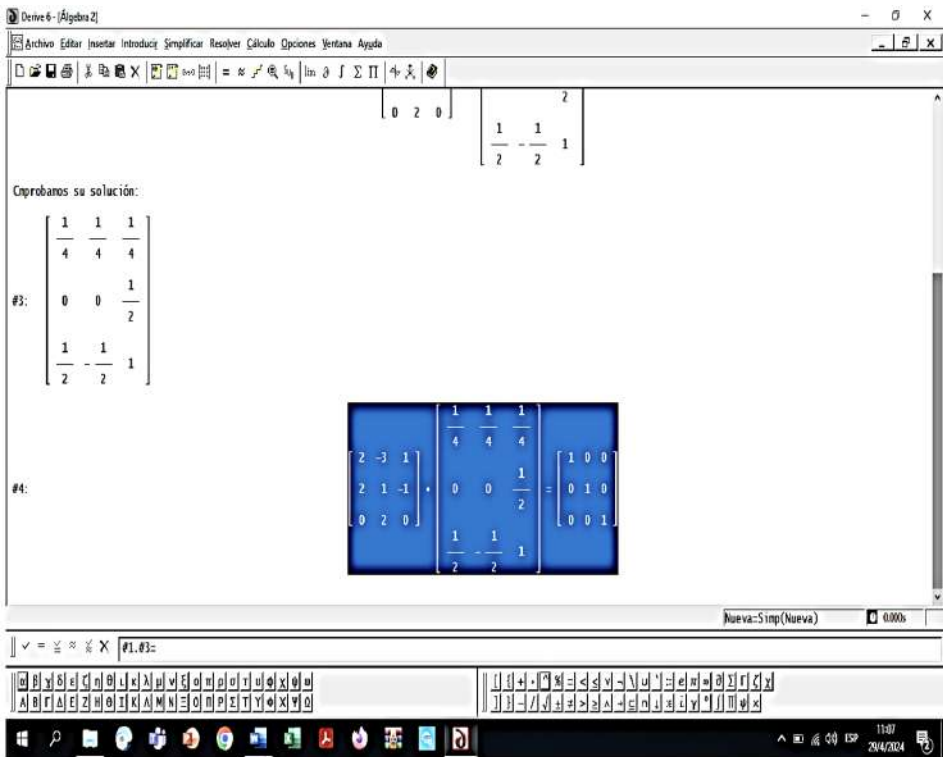
Fuente: Derive 6.0

Figura 2.3. Inversa de una matriz 3x3



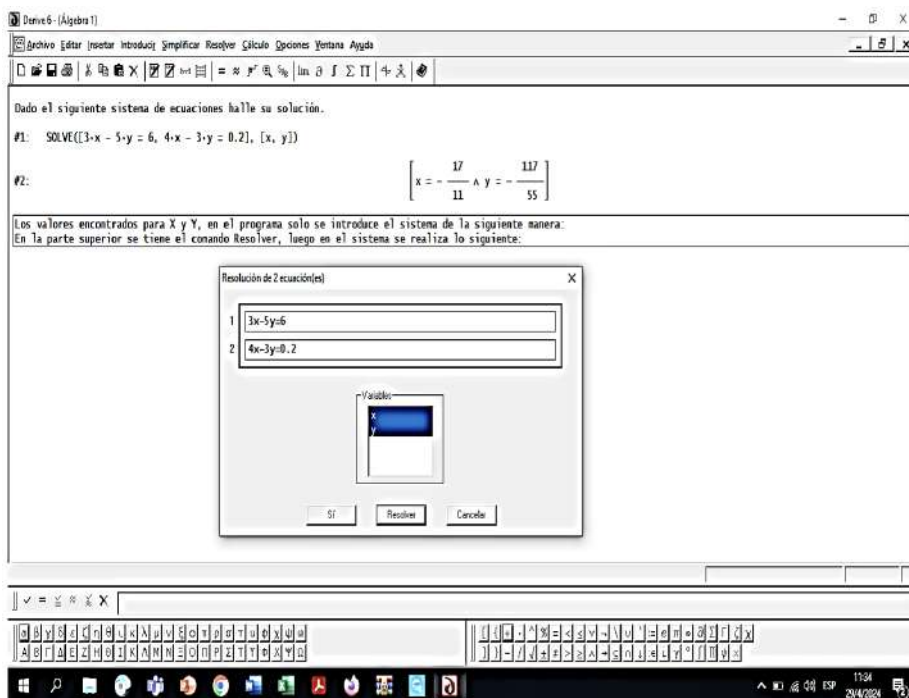
Fuente: Derive 6.0

Figura 2.4. Demostración de una matriz orden 3x3



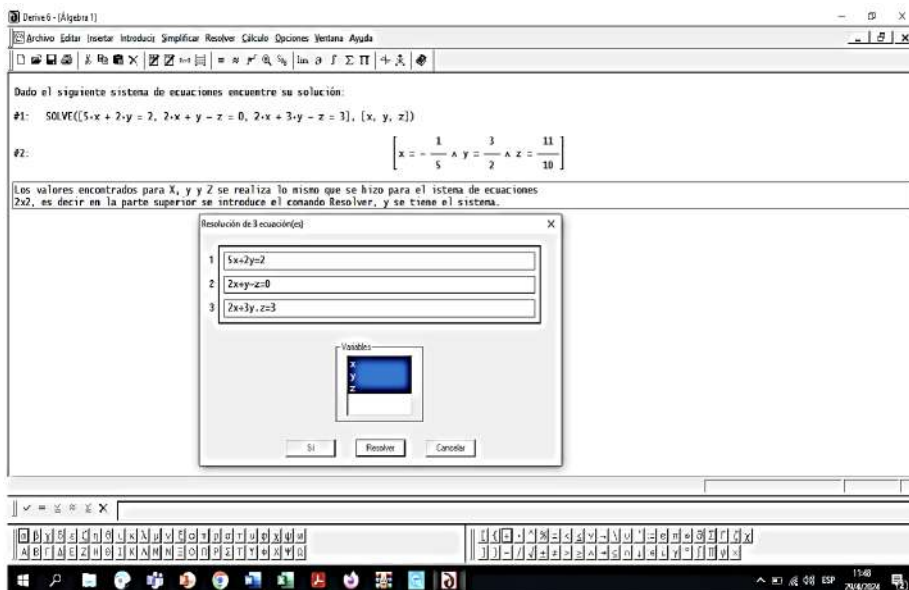
Fuente: Derive 6.0

Figura 2.5. Resolución sistema de ecuaciones de dos variables



Fuente: Derive 6.0

Figura 2.6. Resolución sistema de ecuaciones de tres variables



Fuente: Derive 6.0

2.8. EJERCICIOS

1.- Dadas las siguientes matrices, halle su descomposición aplicando el método de Gauss-Jordan, y de cofactores, *compruebe* su respuesta con los cuatros pasos establecidos.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

2.- Dada la siguiente matriz, verifique la propiedad de la matriz invertible, es decir debe cumplir la siguiente relación:

$$(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

3.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones, halle su solución aplicando al menos dos métodos conocidos, es decir Gauss-Jordan y Cramer o Gauss-Jordan Reducido y Cofactores. Compruebe su respuesta.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

4.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones, halle su solución y compruebe su resultado.

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

CAPÍTULO III

3. VECTORES EN $\mathbb{R}^n$ Y ESPACIOS VECTORIALES

3.1. DESCRIPCIÓN DEL MOVIMIENTO. DEFINICIONES

La descripción del movimiento implica la observación y registro de los cambios de posición que experimenta un objeto en relación al tiempo. Para describir un movimiento, es necesario tener en cuenta aspectos como la trayectoria, la velocidad y la aceleración.

Este movimiento es estudiado por la física, específicamente en las ramas de la cinemática y la dinámica.

Figura 3.1. Descripción de movimiento



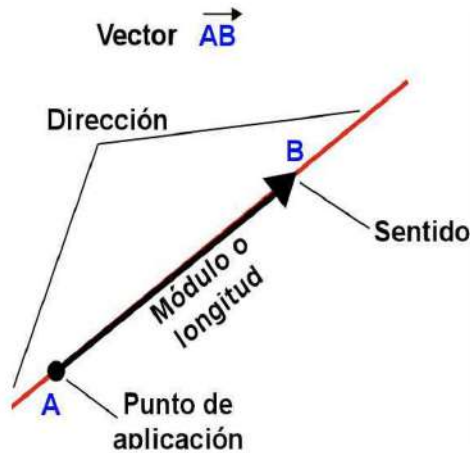
Fuente: Pixabay.com

3.2. DEFINICIÓN DE UN VECTOR

Un vector fijo del plano euclídeo es un segmento orientado, en el que hay que distinguir tres características:

- **Módulo:** la longitud del segmento expresado en términos de un valor numérico y una unidad.
- **Dirección:** el ángulo del vector con respecto al eje x.
- **Sentido:** La orientación del segmento, del origen al extremo del vector. Puede ser positivo o negativo.

Figura 3.2. Componente de un vector



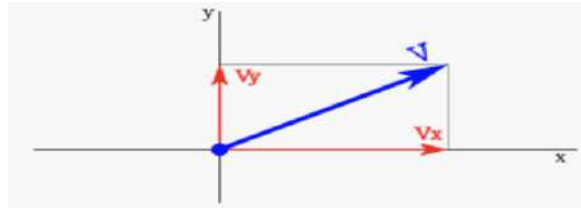
Fuente: Significados.com/vector/

Los vectores fijos del plano se denotan con letras mayúsculas (y una flecha hacia la derecha encima), por ejemplo, $\vec{v}$, que indican su origen y extremo respectivamente. Es decir, el punto inicial es el origen o punto de aplicación y el punto final V es el extremo del vector $\vec{v}$, cuyas coordenadas son:

$$\vec{v} = (v_x, v_y)$$

Características de un vector

Figura 3.3. Coordenadas cartesianas

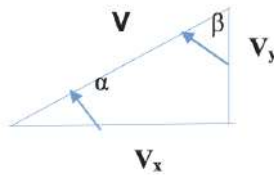


Fuente: Significados.com/vector/

Un vector se puede definir por sus coordenadas, si el vector está en el plano xy .

Figura 3.4. Triángulo rectángulo

$$\vec{v} = (v_x, v_y)$$



Si consideramos el triángulo formado por los componentes V_x , V_y (como catetos) y V (como hipotenusa), por el teorema de Pitágoras, se puede calcular V_x multiplicando V por el $\cos\alpha$ (siendo α el ángulo formado por V_x y V) o multiplicando V por el $\sin\beta$ (siendo β el ángulo formado por V_y y V). De igual forma, se puede calcular V_y multiplicando V por el $\sen\alpha$ o multiplicando V por el $\cos\beta$ (considerando las posiciones de α y β mencionadas anteriormente).

Siendo el vector la suma vectorial de sus coordenadas:

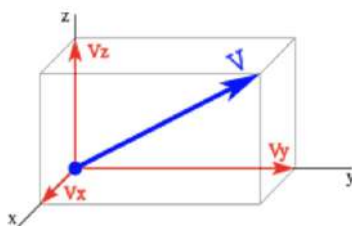
$$= V_x + V_y$$

Coordenadas tridimensionales

Si un vector en el espacio R^3 , sobre los ejes x , y , z , se puede representar como:

$$\vec{v} = (V_x, V_y, V_z)$$

Figura 3.5. Coordenadas tridimensionales



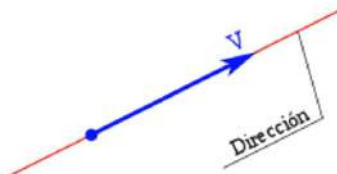
Fuente: Significados.com/vector/

Siendo sus coordenadas: V_x , V_y , V_z .

Si representamos el vector gráficamente, podemos diferenciar los siguientes elementos:

La recta soporte o **dirección**, sobre la que se traza el vector.

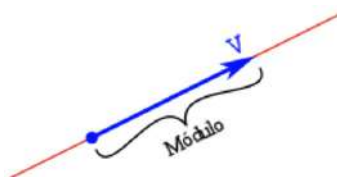
Figura 3.6. Dirección de recta



Fuente: Significados.com/vector/

El **módulo** o amplitud con una longitud proporcional al valor del vector.

Figura 3.7. Módulo de recta



Fuente: Significados.com/vector/

El **sentido**, indicado por la punta de flecha, siendo uno de los dos posibles sobre la recta soporte.

Figura 3.8. Sentido de recta



Fuente: Significados.com/vector/

El **punto de aplicación** que corresponde al lugar geométrico al cual corresponde la característica vectorial representada por el vector.

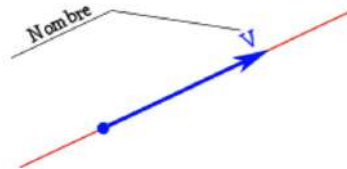
Figura 3.9. Punto de aplicación



Fuente: Significados.com/vector/

El **nombre** o denominación es la letra, signo o secuencia de signos que define al vector.

Figura 3.10. Nombre



Fuente: Significados.com/vector/

Por lo tanto, en un vector podemos diferenciar:

Figura 3.11. Vector

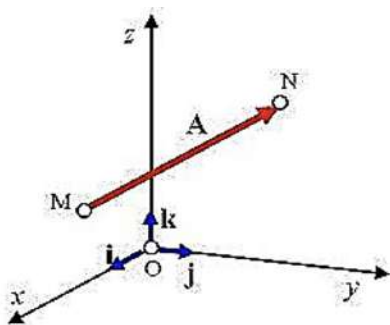


Fuente: Significados.com/vector/

Nota. Cómo se puede observar en las gráficas correspondientes al vector, se puede representar con cinco elementos correspondientes.

Otra de las formas de representar a un vector es mediante magnitudes vectoriales como:

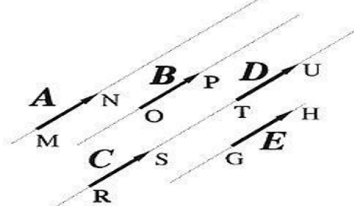
Figura 3.12. Magnitudes vectoriales



Fuente Significados.com/vector/

Frente a aquellas magnitudes físicas, tales como la masa, la presión, el volumen, la temperatura, etc., que quedan completamente definidas por un número, llamadas también escalares, y las unidades usadas en su medida, aparecen otras, tales como el desplazamiento, la velocidad, la aceleración, el campo eléctrico, electromagnético, etc., que no quedan completamente definidas dando un dato numérico, sino que llevan asociadas una dirección. Estas últimas magnitudes son llamadas **vectoriales** en contraposición a las primeras llamadas escalares

Figura 3.13. Ver



Fuente Significados.com/vector/

Operaciones con vectores

Con vectores, se pueden realizar las siguientes operaciones: sumar, restar, multiplicar un escalar por un vector, producto punto, producto vectorial. Las operaciones en forma gráfica se las puede realizar hasta el espacio R^3 , y las operaciones analíticas hasta el espacio R^n .

Nota: se indica que, para las operaciones entre vectores, se sigue siempre aplicar la siguiente representación: $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W} \in R^n$, donde:

$\vec{U}=(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$; $\vec{V}=(v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$; $\vec{W}=(w_1, w_2, w_3, \dots, w_n)$; considerando que para los vectores se mencionaron las matrices de orden $n \times 1$.

Ejemplo 1

Dados los siguientes vectores:

$$\vec{U} = (1, 2, -3, 5, 6, 0, 1, -2); \vec{V} = (1/2, 3, -1, 5, 6, 2, 1, 2); \vec{W} = (0, 2, -3, 5, 6, -5, 1, 3)$$

Encontrar:

a. $3\vec{U} - 2\vec{V} + \vec{W}$

b. $\frac{1}{2}\vec{V} - 2\vec{W} + \vec{U}$

Solución: primero debemos observar que los elementos de cada vector tengan el mismo número de componentes para poder realizar la operación requerida:

$$3\vec{U} = (3, 6, -9, 15, 18, 0, 3, -6); -2\vec{V} = (-1, -6, 2, -10, -12, -4, -2, -4);$$

$$\vec{W} = (0, 2, -3, 5, 6, -5, 1, 3)$$

$$3\vec{U} - 2\vec{V} + \vec{W} = (2, 2, -10, 10, 12, -9, 2, -7); \text{solución.}$$

Solución de b.

$$\frac{1}{2}\vec{V} = (1/4, 3/2, -1/2, 5/2, 3, 1, 1/2, 1); -2\vec{W} = (0, -4, 6, -10, -12, 10, -2, -6);$$

$$\vec{U} = (1, 2, -3, 5, 6, 0, 1, -2):$$

$$\frac{1}{2}\vec{V} - 2\vec{W} + \vec{U} = (5/4, -1/2, 5/2, -5/2, -3, 11, -1/2, -7); \text{solución.}$$

3.3. VECTORES IGUALES

Sean $\vec{U}, \vec{V} \in \mathbb{R}^n$, con $\vec{U} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$; $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$; Dos vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$ son iguales si cumplen la siguiente condición: $|\vec{U}| = |\vec{V}|$

donde $|\vec{U}|$ y $|\vec{V}|$ son las magnitudes de los vectores $\vec{U}$ y $\vec{V}$ respectivamente. Además, los vectores deben tener la misma dirección.

Ejemplo 2

Dados los siguientes vectores:

$\vec{U} = (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 2)$; y $\vec{V} = (2/2, 8/4, 16/4, 25/5, 12/2, 49/7, 16/2, 10/5)$; los vectores son iguales.

$$\vec{U} = (2x+y, -x+3); \vec{V} = (x-3, 4y+1)$$

Solución: partiendo de la definición de vectores iguales se tiene que:

Si $\vec{U} = \vec{V}$; entonces el sistema de ecuaciones es el siguiente:

$$\begin{cases} 2x+y = x-3 \\ -x+3 = 4y+1 \end{cases}; \begin{cases} 2x-x+y = -3 \\ -x-4y = 1-3 \end{cases}; \begin{cases} x+y = -3 \\ -x-4y = -2 \end{cases}$$

Desarrollando el sistema se tiene:

$$X = \frac{\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}} = \frac{12+2}{-4+1} = \frac{-14}{3}; y = \frac{\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}} = \frac{-2-3}{-4+1} = \frac{5}{3}$$

Los valores son: $X = \frac{-14}{3}$; $Y = \frac{5}{3}$; esos valores los reemplazamos en los vectores para saber si son iguales:

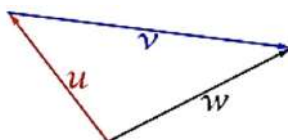
$\vec{U} = (2\frac{-14}{3} + \frac{5}{3}, -\frac{14}{3} + 3)$; $\vec{V} = (\frac{-14}{3} - 3, 4\frac{5}{3} + 1)$; $\vec{U} = (\frac{-23}{3}, \frac{23}{3})$; $\vec{V} = (\frac{-23}{3}, \frac{23}{3})$; por lo tanto, los vectores $\vec{U} = \vec{V}$ son iguales siempre y cuando $X = \frac{-14}{3}$; $Y = \frac{5}{3}$.

3.4. PROPIEDADES DE LA SUMA DE VECTORES

Podemos demostrar las propiedades de la suma en forma gráfica de la siguiente manera:

Primero, definimos la suma de vectores en el orden $u + v$ que produce otro vector. Es como encadenar, siempre visualmente, un vector u y luego uno v . Diremos que $u + v$ se simplifica como un vector w o que w se descompone como suma de vectores u y v .

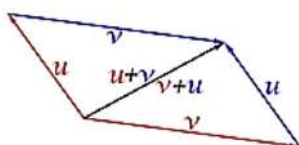
Figura 3.14. Suma de vectores



Fuente: Significados.com/vector/

1) Decir que $u+v = v+u$, para que cumpla la propiedad conmutativa respecto a la suma, es decir que las dos sumas simplifiquen en el mismo vector, en negro. Véase que, en física, los vectores en rojo simulan la descomposición de fuerzas ejercidas por el vector negro en su origen, y se representan como el método del paralelogramo.

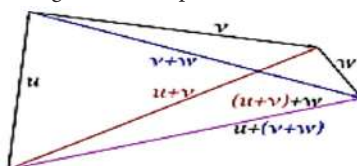
Figura 3.15. Propiedad conmutativa



Fuente: Significados.com/vector/

Decir que $u+(v+w) = (u+v)+w$, para la propiedad asociativa respecto a la suma; es decir que, las simplificaciones de sumas de vectores puedan ser optativas en cualquier cadena de sumas.

Figura 3.16. Propiedad asociativa



Fuente: Significados.com/vector/

Decir que existe un vector cero (llamado elemento neutro) tal que $u+0 = u$, equivale a exigir que exista un vector incapaz de efectuar, mediante la suma, modificación alguna a todos los vectores.

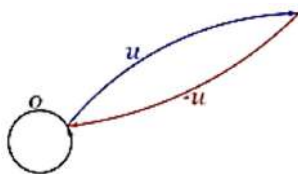
Figura 3.17. Vector nulo



Fuente: Significados.com/vector/

Decir que $u + (-u) = 0$, es exigir la existencia de elemento neutro u opuesto a u , que es $-u$, que sumado a u simplifique en un vector cero.

Figura 3.18. Vector opuesto



Fuente: Significados.com/vector/

Nota. También se pueden demostrar las propiedades de la suma de vectores:

Sean los vectores $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W} \in \mathbb{R}^n$; donde:

$\vec{U} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ y $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$, $\vec{W} = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_n)$; las siguientes propiedades son siempre verdad:

1. $\vec{U} + \vec{V} = \vec{V} + \vec{U}$; *propiedad conmutativa.*
2. $\vec{U} + (\vec{V} + \vec{W}) = (\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W}$; *propiedad asociativa.*
3. $\vec{U} + 0 = \vec{U}$; *propiedad del elemento neutro.*
4. $\vec{U} + (-\vec{U}) = 0$; *propiedad de opuesto aditivo que es el vector nulo*

Demostración de la propiedad 4.

Sea $\vec{U} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$; se reemplaza en la expresión indicada

$$\vec{U} + (-\vec{U}) = 0; [(u_1, u_2, u_3, \dots, u_n) + (-u_1, -u_2, -u_3, \dots, -u_n)];$$

$$(u_1 + (-u_1), u_2 + (-u_2), u_3 + (-u_3), \dots, u_n + (-u_n))$$

$$(u_1 - u_1, u_2 - u_2, u_3 - u_3, \dots, u_n - u_n) = [(0, 0, 0, \dots, 0)] = 0$$

Se demuestra que es igual al vector nulo.

3.5. PRODUCTO PUNTO (INTERNO), VECTORES PERPENDICULARES (ORTOGONALES)

Sean los vectores $\vec{U}, \vec{V} \in \mathbb{R}^n$; donde:

$\vec{U} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ y $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$, se dice que el producto punto de vectores es la relación siguiente:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = (u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3 + \dots + u_n \cdot v_n).$$

Ejemplo 3

Sean los vectores $\vec{U} = (1, 3, -4, 1/2, 3, 4, 6)$ y $\vec{V} = (2, 5, 1/3, 4, 3, 2, 0)$, hallar el producto punto $\vec{U} \cdot \vec{V} = ?$

Solución: se debe primero verificar que los vectores indicados deben tener el mismo número de componentes, para realizar la operación:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = [(1) \cdot (2) + (3) \cdot (5) + (-4) \cdot (1/3) + (1/2) \cdot (4) + (3) \cdot (3) + (4) \cdot (2) + (6) \cdot (0)]$$

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = (2 + 15 - 4/3 + 2 + 9 + 8 + 0) = 104/3$$

Definición: se dice que dos vectores son PERPENDICULARES u ORTOGONALES si el producto escalar $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$

Ejemplo 4

Sean los vectores

a. $\vec{U} = (2, 3, 1/2, 3, 6)$ y $\vec{V} = (2, -2, 4, -4, 2)$, indicar si los vectores son perpendiculares.

Solución: al aplicar su definición, se tiene:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = [(2) \cdot (2) + (3) \cdot (-2) + (1/2) \cdot (4) + (3) \cdot (-4) + (6) \cdot (2)] = (4 - 6 + 2 - 12 + 12) = 0$$

Los vectores sí son perpendiculares.

b. $\vec{U} = (k+1, 1-2k, 3, 1/2k-3, 5)$ y $\vec{V} = (-3, 5, 3k-1, 4, k-4)$, hallar el valor de k para indicar si los vectores son perpendiculares; compruebe su resultado.

Solución: se multiplican los vectores $\vec{U} \cdot \vec{V} = 0$ por la definición de vectores perpendiculares

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = [(k+1)(-3) + (1-2k)(5) + 3(3k-1) + (1/2k-3)(4) + 5(k-4)] = 0$$

= $[-3k - 3 + 5 - 10k + 9k - 3 + 2k - 12 + 5k - 20] = 0$; sumando y restando se tiene que $3k - 33 = 0$; $k = 11$, se reemplaza en los vectores para ver si son perpendiculares:

$$\vec{U} = (11+1, 1-2(11), 3, \frac{1}{2}(11)-3, 5) \text{ y } \vec{V} = (-3, 5, 3(11)-1, 4, 11-4)$$

Por tanto:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = [12 \cdot (-3) + (-21) \cdot 5 + 3(32) + 10 + 5(7)] = 0$$

= $(-36 - 105 + 96 + 10 + 35) = 0 = 0$; Los vectores son perpendiculares cuando $K = 11$.

c. Dados los siguientes vectores.

$$\vec{U} = (1/2k+1, 3-2k, 1/2, 1/2k-1, 5) \text{ y } \vec{V} = (3, -2, 3k-1, 2, k-4)$$

Hallar el valor de k para indicar si los vectores son perpendiculares; compruebe su resultado.

Se deja al lector para que encuentre el valor de $k = ?$

Propiedades del producto punto (escalar)

Las siguientes propiedades son siempre verdaderas

Sean los vectores $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W} \in \mathbb{R}^n$; donde:

$\vec{U} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ y $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$, $\vec{W} = (w_1, w_2, w_3, \dots, w_n)$. Además, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Propiedad 1

El signo del producto escalar queda determinado por el ángulo que forman los vectores:

$$\vec{U} \cdot \vec{V} > 0, \text{ si } \vec{V}, \vec{U} \text{ es agudo.}$$

$$\vec{U} \cdot \vec{V} < 0, \text{ si } \vec{V}, \vec{U} \text{ es obtuso.}$$

Propiedad 2

Conmutativa: $\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$.

Propiedad 3

Distributiva:

$$\vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = |\vec{V}|^2$$

Demostración:

▪ **Propiedad conmutativa:**

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \stackrel{(1)}{=} |\vec{v}| |\vec{u}| \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{u}}) = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

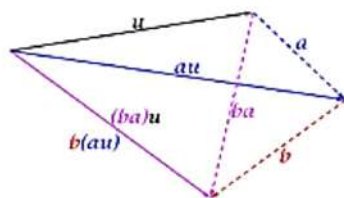
Nota. Otra forma de demostrar las propiedades del producto punto es mediante las gráficas correspondientes:

Producto por un escalar

La definición producto por un escalar $a \cdot u$ produce otro vector; es como modificar el extremo final del vector u , siempre visualmente.

Por un lado, la representación del producto en el caso de que el cuerpo de los escalares sea $K=R$ modifica visualmente la longitud de la imagen del vector, y ambos quedan siempre superpuestos. Por otro lado, las representaciones en el caso de que $K=C$, además de modificar la longitud, también agrega rotaciones. Para facilitarlas visualmente considérense centradas en el origen del vector, siendo estas modificaciones un poco más expresivas, visualmente, pero no más fáciles de presentarse.

Figura 3.19. Escalar por un vector

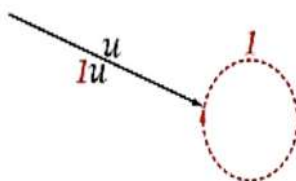


Fuente: Significados.com/vector/

a. Decir que $a(bu) = (ab)u$, es exigir que los productos encadenados $a(b(u))$ pueden simplificarse como uno, $c=ab$; luego $(ab)u$ queda como cu .

b. Hay que decir que existe el escalar 1 tal que $1u=u$, equivale a decir exista un escalar incapaz de efectuar, mediante producto, modificación alguna a todos los vectores.

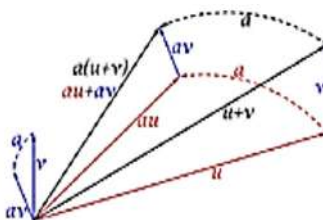
Figura 3.20. Vector unitario



Fuente: Significados.com/vector/

Decir que $a(u+v)=au+av$ es exigir la propiedad distributiva respecto la suma vectorial.

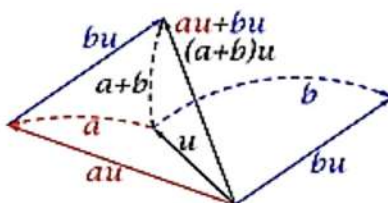
Figura 3.21. Propiedad distributiva



Fuente: Significados.com/vector/

c. Decir que $(a+b)u=au+bu$ es exigir la propiedad distributiva respecto la suma escalar.

Figura 3.22. Propiedad distributiva de la suma



Fuente: Significados.com/vector/

3.5.1. Norma y distancia de un vector

Distancia

Sean los vectores $\vec{U}, \vec{V} \in \mathbb{R}^n$; donde:

$\vec{U} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$ y $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_n)$, se dice que la distancia entre dos vectores es la siguiente relación:

$$d(\vec{U}, \vec{V}) = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

Ejemplo 4

a. Dados los siguientes vectores:

$$\vec{U} = (1, 2, -4, 1/2, 3, -1) \text{ y } \vec{V} = (2, 5, 1/3, 4, 3, 2):$$

Hallar su distancia

Solución: debemos reemplazar los vectores en la relación de distancia entre los vectores:

$$d(\vec{U}, \vec{V}) = \sqrt{(1-2)^2 + (2-5)^2 + (-4-1/3)^2 + (1/2-4)^2 + (3-3)^2 + (-1-2)^2}$$

$$d(\vec{U}, \vec{V}) = \sqrt{1 + 9 + \frac{169}{9} + \frac{49}{4} + 0 + 9} = \frac{1}{3}\sqrt{1401}; \text{ solución}$$

b. La distancia entre dos vectores $d(\vec{U} - \vec{V}) = 4$; y los vectores:

$\vec{U} = (k+1, 1+2k, 2, -3)$ y $\vec{V} = (k+2, 3, 2k-1, k-4)$; halle el valor de k para que su distancia sea igual a 4 y compruebe su resultado.

Solución: de igual manera, reemplazamos los elementos de los vectores en la relación indicada. Se tiene:

$$d(\vec{U}, \vec{V}) = \sqrt{(k+1-k-2)^2 + (1+2k-3)^2 + (2-2k+1)^2 + (-3-k+4)^2};$$

$$4 = \sqrt{(-1)^2 + (2k-2)^2 + (-2k+3)^2 + (-k+1)^2};$$

$$4 = \sqrt{1 + 4k^2 - 8k + 4 + 4k^2 - 12k + 9 + k^2 - 2k + 1}$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros y se tiene la siguiente relación:

$$16 = 9k^2 - 22k + 15 = 16; (1) 9k^2 - 22k - 1 = 0$$

Se tiene una ecuación de segundo grado y se debe resolver mediante la fórmula conocida:

$$k = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; k = \frac{22 \pm \sqrt{(-22)^2 - 4(9)(1)}}{2(9)}; = \frac{22 \pm \sqrt{484 + 36}}{18}; k = \frac{11 \pm \sqrt{130}}{9}$$

Por último, reemplazamos en la ecuación 1 y se tiene:

$$\begin{aligned} 9\left(\frac{11 + \sqrt{130}}{9}\right)^2 - 22\left(\frac{11 + \sqrt{130}}{9}\right) - 1 \\ = \left(\frac{121 + 22\sqrt{130} + 130}{9}\right) - \frac{242 + 22\sqrt{130}}{9} - 1 \\ \frac{251 + 22\sqrt{130} - 242 - 22\sqrt{130}}{9} - 1 = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto, se demuestra que el valor de $k = \frac{11 \pm \sqrt{130}}{9}$; cumple para que la $d(\vec{U} - \vec{V}) = 4$

Norma de un vector

Sea el vector $\vec{U}$, $\in \mathbb{R}^n$; donde; $\vec{U} = (u_1, u_2, u_3, \dots, u_n)$; se llama norma de un vector a la siguiente relación

$$\|\vec{U}\| = (\vec{U} \cdot \vec{U})^{1/2} = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2 + \dots + (u_n)^2}$$

Ejemplos 5

a. Dado el siguiente vector $\vec{U} = (1, 3, -3, \frac{1}{2}, 4, -1)$; halle su $\|\vec{U}\|$?

Solución: los elementos del vector U se reemplazan en el vector indicado:

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{(1)^2 + (3)^2 + (-3)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + (4)^2 + (-1)^2} = \sqrt{36 + \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{145}$$

b. La norma de un vector es igual a 3, y el vector $\vec{U} = (-2, k-1, 2, 1-k, 1)$; halle el valor de k, para verificar que su norma es igual a 3.

Solución: reemplazamos en la relación de la norma y se tiene:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-2)^2 + (k-1)^2 + (2)^2 + (1-k)^2 + (1)^2} = 3$$

$3 = \sqrt{4 + k^2 - 2k + 1 + 4 + 1 - 2k + k^2 + 1}$; elevamos al cuadrado ambos miembros y se tiene:

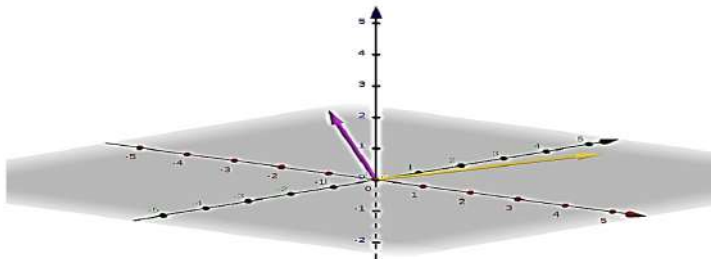
$9 = 2k^2 - 4k + 11$; $2k^2 - 4k + 2 = 0$; $k^2 - 2k + 1 = 0$; $k = 1$; reemplazamos en la relación *para comprobar la solución:

$$3 = \sqrt{(-2)^2 + (1-1)^2 + (2)^2 + (1-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{9} = 3; llqgd$$

3.6. ESPACIOS VECTORIALES

Un espacio vectorial es una estructura matemática que tiene un conjunto de elementos llamados vectores con dos operaciones llamadas suma de vectores y multiplicación de un vector por un escalar que deben cumplir con ciertas propiedades. Formalmente, un espacio vectorial sobre un campo K es un conjunto V junto con dos operaciones, denotadas como la suma de vectores $(u+v)$ y la multiplicación por un escalar $(a \cdot v)$.

Figura 3.23. Espacios vectoriales



Fuente: GeoGebra

Definición, axiomas

Los axiomas, en el contexto de los vectores, se refieren a las propiedades fundamentales que deben cumplir las operaciones definidas en un espacio vectorial.

Estos axiomas establecen reglas básicas que garantizan que las operaciones de suma de vectores y multiplicación por escalares se comporten de manera cohe-

rente y sigan las propiedades algebraicas esenciales. Aquí están los axiomas para un espacio vectorial V sobre un campo K :

- **Cierre bajo la suma:** si u y v son vectores en V , entonces $u + v$ también es un vector en V .
- **Asociatividad de la suma:** $(u + v) + w = u + (v + w)$ para todo $u, v, w \in V$.
- **Existencia de un elemento neutro aditivo:** existe un vector 0 en V tal que $u + 0 = u$ para todo $u \in V$.
- **Existencia de inversos aditivos:** para cada $u \in V$, existe un vector $-u$ en V tal que $u + (-u) = 0$.
- **Cierre bajo la multiplicación por un escalar:** si a es un escalar en K y v es un vector en V , entonces $a*v$ es un vector en V .
- **Compatibilidad de la multiplicación por escalares con la suma de vectores:** $a * (u + v) = a * u + a * v$ para todo $a \in K$ y $u, v \in V$.
- **Compatibilidad de la multiplicación por escalares con la suma de escalares:** $(a + b) * v = a * v + b * v$ para todo $a, b \in K$ y $v \in V$.
- **Compatibilidad de la multiplicación por escalares con la multiplicación por escalares:** $a * (b * v) = (a * b) * v$ para todo $a, b \in K$ y $v \in V$.
- **Identidad multiplicativa:** $1 * v = v$ para todo $v \in V$, donde 1 es el elemento neutro multiplicativo en F .

Ejemplo 1

Demuestre que el conjunto de todas las matrices de orden 2×2 es un espacio vectorial.

Solución: como las matrices son de orden 2×2 , representaremos dos matrices cualesquiera del orden establecido.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} a^1 & b^1 \\ c^1 & d^1 \end{bmatrix}$$

- Aplicamos una de las propiedades del espacio vectorial **cierre bajo la suma**. Si u y v son vectores en V , entonces $u + v$ también es un vector en V .

$$A+B = \begin{bmatrix} a + a^1 & b + b^1 \\ c + c^1 & d + d^1 \end{bmatrix}; \text{ Por tanto, la suma de matrices sigue teniendo orden } 2 \times 2$$

- Al aplicar la otra propiedad **cierre bajo la multiplicación por un escalar**, si α es un escalar en K y v es un vector en V , entonces $\alpha * v$ es un vector en V .

$\alpha * A = \begin{bmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha c & \alpha d \end{bmatrix}$; por tanto cumple la propiedad establecida. Así, la matriz sigue siendo de orden 2×2 .

Se concluye que la matriz de orden 2×2 , es un espacio vectorial.

Nota. Se puede seguir demostrando con las demás propiedades, pero es suficiente con estas para indicar si un ejemplo es espacio vectorial o no.

Ejemplo 2

Determinar si el conjunto dado es un espacio vectorial:

$V = \mathbb{R}^2$:

Solución: tenemos que demostrar que la suma de dos vectores siga estando en $\mathbb{R}^2$, lo mismo para el escalar por el vector.

$(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ y $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$; entonces aplicamos la propiedad de la suma que es

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in \mathbb{R}^2$$

ahora multiplicamos el escalar por el vector; $\alpha * (x, y) = (\alpha x, \alpha y) \in \mathbb{R}^2$

Por lo que concluimos que $(\mathbb{R}^2, +, *)$; es un espacio vectorial; llqdd.

3.7. SUBESPACIOS VECTORIALES

Sea V un espacio vectorial y W un subconjunto no vacío de V .

W es un **subespacio** de V si W es en sí mismo un espacio vectorial con las mismas operaciones (suma de vectores y producto por un escalar) definidas en V .

Formalmente, un subconjunto W de un espacio vectorial V se considera un subespacio vectorial si cumple con los siguientes tres requisitos:

- **Cierre bajo la suma:** si u y v son vectores en W , entonces $u + v$ también pertenece a W .

- **Cierre bajo la multiplicación por un escalar:** si α es un escalar y v es un vector en W , entonces $\alpha * v$ también pertenece a W .
- **Contiene el vector cero:** el vector cero (0) debe pertenecer a W .

Estos requisitos garantizan que el conjunto (W) sea cerrado bajo las operaciones vectoriales y forme un espacio vectorial propio. Cabe destacar que (W) puede tener una dimensión menor o igual que la dimensión de (V), pero siempre comparte la misma estructura algebraica.

Ejemplo 1

Sea el conjunto $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$; es decir, la recta que tiene como ecuación $y=0$; es un subespacio vectorial.

Solución: se deben cumplir las propiedades fundamentales del subespacio vectorial que son:

El vector $0 \in W$; pues cumple que $(0, 0) \in W$

Para la suma de dos vectores en W , se tiene la ecuación:

$$(X_1, 0) + (X_2, 0) = (X_1 + X_2, 0); \text{ cumple con la propiedad de la suma.}$$

Para la multiplicación de un escalar por un vector de W se tiene:

$$\alpha (x, y) = (\alpha x, 0); \text{ por lo tanto } W \text{ es subespacio de } \mathbb{R}^2$$

Ejemplo 2

Sea el conjunto $W = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x^2 - y^2| = 0\}$; es un subespacio de $\mathbb{R}^2$

Solución: consideremos la ecuación descrita $|x^2 - y^2| = 0$; se demuestra que

$$x=y \vee x=-y; \text{ en la propiedad el vector } 0 \in W; \text{ pues cumple que } (0, 0) \in W$$

Para la propiedad de la suma de dos vectores en W , no se cumple, pues al dar un par de puntos: $(2^2 - 2^2 = 0) = (4^2 - 0 > 0) \notin W$; por lo tanto, W no es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^2$

Ejemplo 3

Sea el conjunto $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}$; es decir, un plano que pasa por el origen y por tanto es un espacio vectorial.

Solución: de la ecuación del plano, podemos despejar la variable $x = -y - z$; es decir, los vectores que pertenecen a W son de la forma $(-y - z, y, z)$; con $y, z \in \mathbb{R}$; así cumple la propiedad $(0, 0, 0) \in W$.

La suma de dos vectores del plano sigue estando en W , pues:

$$(-y - z, y, z) + (-y' - z', y', z') = (-(y + y') - (z + z'), y + y', z + z').$$

Para la multiplicación de un escalar α por un plano de W se tiene:

$$\alpha(-y - z, y, z) = (-\alpha y - \alpha z, \alpha y, \alpha z) \in W.$$

Por lo tanto, se cumple que W es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ llqdd.

3.8. EJERCICIOS

1. Dados los siguientes vectores

$$\vec{U} = (1, -2, 3, 5, 6, \frac{1}{2}, 1, -2); \vec{V} = (1, 3, -1, -\frac{1}{2}, 6, 2, 1, 2); \vec{W} = (0, 2, -3, 5, 6, -5, 1, -3)$$

Encontrar:

a. $2\vec{U} - \vec{V} + \vec{W}$

b. $\frac{1}{2}\vec{W} - 2\vec{V} + 3\vec{U}$

2. Dados los siguientes vectores

$$\vec{U} = (2x + 5y, 3x + 4) \text{ y } \vec{V} = (-3x + 2, y + 2), \text{ halle los valores de } x, y, \text{ para verificar si los vectores } \vec{U} = \vec{V}. \text{ Compruebe su resultado con los cuatro pasos establecidos.}$$

3. Dados los siguientes vectores

$$\vec{U} = (-2x + 4y, z + 2y - 2, -3x + 4) \text{ y } \vec{V} = (-2z, 3x + 2, \frac{1}{2}z - y), \text{ halle los valores de } x, y, z, \text{ para verificar si los vectores } u = v. \text{ Compruebe su resultado.}$$

4. Dados los siguientes vectores

$$\vec{U} = (3k - 1, 1, 5 - k) \text{ y } \vec{V} = (-3, \frac{1}{2}k, -1), \text{ halle el valor de } K \text{ para indicar si los vectores son perpendiculares, compruebe su resultado.}$$

5. Dados los siguientes vectores

$\vec{U} = (3k-1, k-1, 5-k)$ y $\vec{V} = (-3, 1/2k, -1+k)$, halle el valor de K para indicar si los vectores son perpendiculares. Compruebe su resultado.

6. Dados los siguientes vectores

$\vec{U} = (-2, 1/2k-1, 5-k)$ y $\vec{V} = (1, 2k, -1+k)$, y la $d(U \cdot V) = 4$, halle el valor de k y compruebe su resultado

7. Dado el siguiente vector.

$\vec{U} = (-2, 1/2k, 2, -1, -k)$, y su $\|\vec{U}\| = 3$; halle el valor de K y compruebe su resultado.

8. Demuestre las siguientes propiedades:

a. $u+(v+w) = (u+v)+w$; donde $u, v, w \in \mathbb{R}^n$; $\vec{U} = (u_1, u_2 \dots, u_n)$; $\vec{V} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ $\vec{W} = (w_1, w_2 \dots, w_n)$

b. $u \cdot (v \cdot w) = (u \cdot v) \cdot w$; donde $u, v, w \in \mathbb{R}^n$

9. Sea el conjunto $\mathbb{R}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_i \in \mathbb{R}, i=1,2,3\}$; demuestre que $\mathbb{R}^3$ es un espacio vectorial.

10. Sea el conjunto $F = \{(x,y) \mid x>0; y>0; x,y \in \mathbb{R}\}$; indique si es un espacio vectorial.

11. Dado el siguiente conjunto $W = \{A \in \mathbb{R}_{2 \times 2} \mid A=A^t\}$, donde la matriz A es simétrica, indicar si el conjunto W es un subespacio vectorial.

12. Dado el siguiente conjunto $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 0\}$, indique si el conjunto W es un subespacio vectorial.

CAPÍTULO IV

4. DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

4.1. COMBINACIÓN LINEAL

La combinación lineal es un concepto fundamental en el ámbito de la matemática y la geometría que se utiliza para describir cómo se pueden crear nuevas cantidades o vectores a partir de una combinación ponderada de otros vectores. En otras palabras, es una forma de mezclar o sumar diferentes cantidades de ciertos elementos para obtener un nuevo resultado (Rosas, 2017).

Si se tienen dos vectores en un espacio tridimensional —A y B—, cada uno de estos vectores tiene una dirección y una magnitud particular. Ahora, puedes crear una combinación lineal de estos vectores al multiplicarlos por ciertos coeficientes (números) y luego sumarlos. La siguiente relación nos indica una combinación lineal.

Combinación lineal = coeficiente1 * A + coeficiente2 * B

Combinaciones lineales y conjunto generador

Combinación lineal

Una combinación lineal permite representar un vector en términos de otros vectores.

Consideremos un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y sus respectivos escalares $c_1, c_2, \dots, c_n$ pertenecientes a algún campo numérico K . Entonces, una combinación lineal de estos vectores se puede expresar de la siguiente manera:

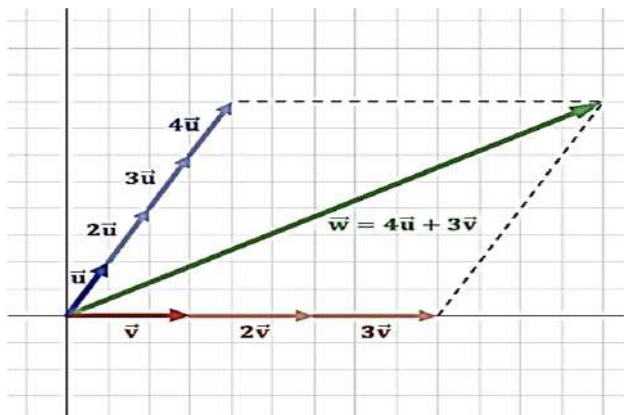
$$V = c_1 * v_1 + c_2 * v_2 + \dots + c_n * v_n$$

En esta expresión, los coeficientes $c_1, c_2, \dots, c_n$ representan las ponderaciones de cada vector en la combinación lineal, y v es el vector resultante. Las combina-

ciones lineales son fundamentales para comprender los vectores en un espacio vectorial.

El concepto de combinación lineal se puede entender de mejor manera al representar en forma gráfica en el plano cartesiano los dos vectores.

Figura 4.1 Combinación lineal



Fuente. GeoGebra

Como se observa en la gráfica, el vector W se obtiene a través de una operación de los vectores U y V ; por tanto, el vector W es una combinación lineal de los otros vectores.

Ejemplos 1

a. El vector $(12, 8, 2)$ en $\mathbb{R}^3$ es una combinación lineal de los vectores:

$(0, 2, -1)$ y $(3, 1, 1)$ puesto que:

$$(12, 8, 2) = 2(0, 2, -1) + 4(3, 1, 1)$$

b. El vector v del conjunto de matrices 2×2 dado por:

$$v = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Es combinación lineal de los vectores:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \text{ y } v_2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ y}$$

Dado que, al realizar la operación entre vectores que contienen matrices de orden 2x2, cumple con el ejemplo propuesto.

$$3v_1 - 3v_2 = 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 6 & -3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 & -4 \\ 6 & -4 & -3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

Ejemplo de aplicación de las combinaciones lineales

El proceso de mezclar colores para obtener un color diferente es un ejemplo de combinación lineal. Por ejemplo, si mezclas pintura roja (R), pintura verde (G) y pintura azul (B) en ciertas proporciones, puedes obtener colores como el amarillo, el morado o el naranja. Cada color primario se representa mediante un vector (R, G, B) en un espacio tridimensional de colores, y al combinarlos linealmente con coeficientes apropiados, se obtiene el color deseado.

Ejemplo de combinación lineal:

Vectores en $\mathbb{R}^n$

Sean, α , β , y $\gamma \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\alpha \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}; \text{ es una combinación lineal}$$

Por ejemplo, para obtener el color morado, podrías usar una combinación lineal de los vectores (0, 1, 0) (verde) y (1, 0, 1) (rojo), asignando diferentes ponderaciones a cada vector; es decir, al realizar la operación correspondiente, nos dice tal aseveración, donde 0.5 es equivalente, tanto para el color verde como el rojo.

$$0.5 * (0,1,0) + 0.5 * (1,0,1) = (0.5,0.5,0.5)$$

El resultado es el vector (0.5, 0.5, 0.5), que representa el color morado en el modelo RGB.

4.2. INDEPENDENCIA LINEAL

Anteriormente conocimos la relación para representar una combinación lineal. Por tanto, la siguiente representación nos indica, la dependencia e independencia de vectores:

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 + \dots + c_n v_n = 0$$

Donde $c_1, c_2, c_3 \dots c_n$, son escalares y $v_1, v_2, v_3 \dots v_n$ es un conjunto de vectores.

Ejemplo 2

Dados los siguientes vectores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix}$$

Indicar si los vectores son linealmente independientes.

Solución: tenemos que calcular un tercer vector v_3 tal que $v_3 = 3v_1 - v_2$

Desarrollemos:

$$3v_1 - v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 21 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De acuerdo con el resultado, se deduce que el vector buscado es:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sobre la base de lo anterior, se puede concluir que estos tres vectores cumplen con la siguiente relación: $3v_1 + v_2 - v_3 = 0$. Por lo cual se concluye que v_3 es combinación lineal de v_1 y v_2 . En estos casos, decimos que los vectores v_1, v_2 y v_3 son linealmente dependientes.

Ejemplo 3

Sean los vectores:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ y } v_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Hallar un escalar c tal que: $cv_1 = v_2$

Desarrollemos:

$$cv_1 = v_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 4c \\ c \\ 7c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix} \rightarrow 4c = 5, c = 1, y 7c = 9$$

Estas tres ecuaciones son imposibles de satisfacer simultáneamente para algún c diferente de cero, por lo cual no existe tal escalar c . En este caso, decimos que los vectores v_1 y v_2 son linealmente independientes, ya que es imposible conseguir un escalar c tal que $(cv)_1 - v_2 = 0$; en otras palabras, v_1 no es combinación lineal de v_2 .

Daremos las definiciones de dependencia e independencia lineal

Definición 1

El conjunto de vectores $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ es linealmente dependiente si existen escalares $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ no todos ceros tal que:

$$v_1 c_1 + v_2 c_2 + v_3 c_3 + \dots + v_n c_n = 0$$

Definición 2

El conjunto de vectores $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ es linealmente independiente si se cumple la siguiente igualdad:

$$v_1 c_1 + v_2 c_2 + v_3 c_3 + \dots + v_n c_n = 0$$

Entonces, cada c_i debe ser igual a cero para toda i en el intervalo:

$$1 \leq i \leq n$$

En los ejemplos anteriores, particularmente el primero nos da la siguiente relación entre los tres vectores:

$$3v_1 - v_2 = v_3$$

Entonces:

$$3v_1 - v_2 - v_3 = 0; \text{ donde: } c_1 = 3, c_2 = -1 \text{ y } c_3 = -1$$

De modo que, cómo no todos los c_i son ceros, entonces los vectores v_1, v_2 y v_3 son linealmente dependientes. En el segundo ejemplo la única manera de que

$c_1 v_1 + c_2 v_2 = 0$ se cumpla, es que $c_1 = c_2 = 0$. En este caso estamos ante dos vectores linealmente independiente.

Ejemplo 4

Dados los siguientes vectores, indicar si son linealmente dependientes o independientes.

Solución: se tiene que encontrar el escalar α de los vectores.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ahora debemos encontrar los escalares c_1 , c_2 y c_3 no todos nulos tales que:

$$c_1 (1 \ 2 \ 3) + c_2 (2 \ -1, 4) + c_3 (3, \alpha, 4) = (0, 0, 0)$$

Al aplicar operaciones con vectores, nos resulta la siguiente igualdad:

$$\begin{bmatrix} c_1 + 2c_2 + 3c_3 \\ 2c_1 - c_2 + \alpha c_3 \\ 3c_1 + 4c_2 + 4c_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Y, al aplicar igualdad de vectores, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{rrcr} c_1 + & 2c_2 + & 3c_3 & = 0 \\ 2c_1 - & c_2 + & \alpha c_3 & = 0 \\ 3c_1 + & 4c_2 & 4c_3 & = 0 \end{array}$$

Se tiene un sistema homogéneo de ecuaciones lineales, el cual tiene dos posibilidades para su solución, la trivial, o, de lo contrario, tiene un número infinito de soluciones.

Llevamos la matriz aumentada del sistema a la forma escalonada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & \alpha & 0 \\ 3 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right) - 2f_1 + f_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -6 + \alpha & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{array} \right) - 3f_1 + f_3 \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & -6 + \alpha & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \end{array} \right) - \frac{1}{5}f_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6 - \alpha}{5} & 0 \\ 0 & -2 & -5 & 0 \end{array} \right) 2f_2 + f_3$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{6-\alpha}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 2\left(\frac{6-\alpha}{5}-5\right) & 0 \end{array} \right)$$

Al desarrollar por medio del método **Gauss-Jordan** reducido, se tiene que el sistema tiene infinitas soluciones.

Si, de la última fila, tomamos a c_3 de forma arbitraria, entonces los valores de c_1 y c_2 se deducirán del valor que tome c_3 .

Esto es:

$$c_3 = c_3, c_2 = -\left(\frac{6-\alpha}{5}\right)c_3, y c_1 = -2\left[-\left(\frac{6-\alpha}{5}\right)c_3\right] - 3c_3$$

Y con respecto al valor o los valores de, será necesario analizar la ecuación que se deduce de la última fila de la matriz aumentada:

$$\left[2\left(\frac{6-\alpha}{5}\right)-5\right]c_3 = 0$$

Pero c_3 no puede ser cero ya que, si lo fuese, entonces la única solución del sistema sería la solución trivial $(0, 0, 0)$. Por lo tanto, la única opción de que:

$$\left[2\left(\frac{6-\alpha}{5}\right)-5\right]c_3 = 0$$

Ahora, a esta ecuación, la vamos a resolver para encontrar el valor de α :

$$2\left(\frac{6-\alpha}{5}\right)-5 = 0$$

$$\begin{aligned} 2\left(\frac{6-\alpha}{5}\right)-5 = 0 &\rightarrow 2\left(\frac{6-\alpha}{5}\right) = 5 \rightarrow 2(6-\alpha) = 25 \rightarrow 12 - 2\alpha = 25 \rightarrow \alpha \\ &= -\frac{13}{2} \end{aligned}$$

Así encontramos el valor de α :

$$\alpha = -\frac{13}{2}$$

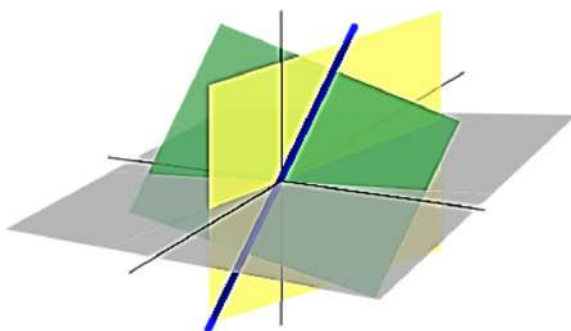
Con lo cual damos respuesta al ejemplo, ya que nos pedía encontrar el valor de α , y los vectores son linealmente independientes.

4.3. BASE Y DIMENSIÓN, SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Base. Una base en el ámbito matemático se refiere a un conjunto de vectores que son linealmente independientes y tienen la capacidad de generar cualquier vector dentro de un espacio vectorial.

Dimensión. De un espacio vectorial, indica el número de vectores de una base de un espacio vectorial. En el ámbito del análisis dimensional, se emplea esta expresión en física para examinar las relaciones entre diversas cantidades físicas a través de sus dimensiones fundamentales.

Figura 4.2. Dimensión



Fuente: <https://www.geogebra.org/m/asb36ypp>

Ejemplo 5 de base y dimensión

Supongamos que disponemos de un espacio vectorial V y una base $B = \{u_1, u_2\}$, donde $u_1 = (1, 2)$ y $u_2 = (2, 1)$. Ahora, el objetivo es representar el vector $V = (10, 2)$ en función de esta base.

La expresión del vector $V = (10, 2)$ en la base $B = \{u_1, u_2\}$ sería:

$$(10, 2) = a_1 * (1, 2) + a_2 * (2, 1) = (a_1 + 2a_2, 2a_1 + a_2)$$

Se buscan los valores a_1 y a_2 , de las ecuaciones siguientes:

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 = 10 \\ 2a_1 + a_2 = 2 \end{cases}$$

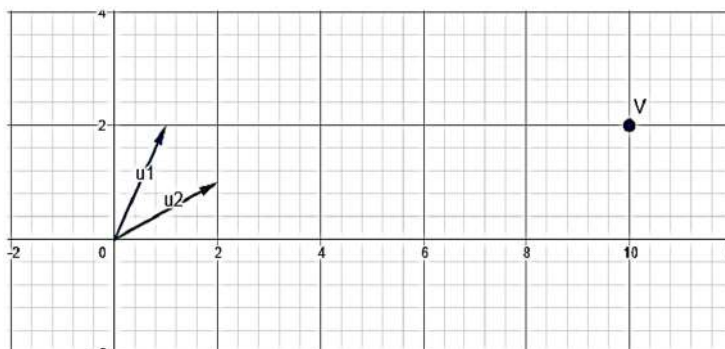
El sistema de ecuaciones, al ser resuelto, tiene como valores:

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{10 - 4}{1 - 4} = -2; a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 10 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{2 - 20}{1 - 4} = 6$$

Así obtenemos que las coordenadas del vector V en la base B son -2 y 6 .

Nota. Este ejemplo demuestra cómo un vector puede ser representado utilizando una base específica y cómo la dimensión de un espacio vectorial está vinculada al número de vectores en esa base para ese espacio.

Figura 4.3. Base de un vector



Fuente. GeoGebra

Sistemas homogéneos

Los sistemas homogéneos representan un concepto esencial en matemáticas y física, y hacen referencia a un conjunto de ecuaciones o desigualdades que exhiben propiedades específicas de simetría. En el ámbito del álgebra lineal, un sistema homogéneo de ecuaciones lineales se caracteriza por tener todas sus constantes de término independiente igualadas a cero. En otras palabras, su objetivo es encontrar soluciones no triviales que satisfagan todas las ecuaciones al ser igualadas a cero. Estos sistemas son de gran relevancia en la teoría de ecuaciones lineales y encuentran aplicaciones en diversos campos como la física, la ingeniería y la economía. La noción de homogeneidad resulta fundamental para comprender la estructura y el comportamiento de sistemas complejos, consolidándose como un tema esencial en el estudio de las ciencias matemáticas y físicas.

K (como los reales o los complejos) se representa de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n &= 0 \\ \cdot &\cdot \\ \cdot &\cdot \\ \cdot &\cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n &= 0 \end{aligned}$$

Teoremas relativos a sistemas homogéneos

Un conjunto de ecuaciones lineales se considera homogéneo cuando todos sus términos independientes son igualados a cero. Diversos teoremas asociados a los sistemas homogéneos proporcionan importantes características y soluciones.

Teorema de Rouch-Frobenius

Este teorema establece que un sistema homogéneo puede tener una solución única, infinitas soluciones, o ninguna solución, dependiendo de condiciones específicas. Por ejemplo, si el rango de la matriz de coeficientes es menor que el número de incógnitas, entonces el sistema tiene soluciones infinitas.

Teorema de Rouché Frobenius	Número de soluciones	Método de resolución
$rg(A) = rg(A *) = n$ → Sistema Compatible Determinado (SCD)	1 solución	- Gauss - Cramer
$rg(A) = rg(A *) \neq n$ → Sistema Compatible Indeterminado (SCI)	Infinitas soluciones	- Gauss
$rg(A) \neq rg(A *)$ → Sistema Incompatible (SI)	No tiene solución	

Características de los sistemas homogéneos

- Los sistemas homogéneos de ecuaciones lineales siempre son compatibles, garantizando así la existencia de soluciones. Esto se debe a que el rango de la matriz de coeficientes y la matriz ampliada con la columna de términos independientes (todos igualados a cero) siempre son iguales.
- Una condición necesaria y suficiente para que un sistema homogéneo tenga soluciones no triviales es que el rango de la matriz de coeficientes sea menor que el número de incógnitas, o expresado de otra manera, que el determinante de la matriz de coeficientes sea igual a cero.

Número de soluciones

- Cuando el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas, el sistema homogéneo tiene infinitas soluciones.

Ejemplo 6 de sistemas homogéneos

Dado el siguiente sistema homogéneo, encuentre la solución:

$$\begin{aligned}x + y + 2z &= 0 \\3x - y - 2z &= 0 \\-x + 2y + z &= 0\end{aligned}$$

Solución: encontramos primero el determinante del sistema de ecuaciones:

$$\left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right| = \frac{-1 + 2 + 12}{-2 + 4 - 3} = \frac{13}{-1} = -13$$

Por lo tanto, su determinante es diferente de cero; así, el rango de la matriz es:

$r = 3$, $n = 3$, número de ecuaciones.

Entonces solo tenemos la solución trivial: $x = y = z = 0$.

4.4. RANGO DE UNA MATRIZ APLICACIONES

El rango de una matriz se define como el número de filas (o columnas) que son linealmente independientes. También puede conceptualizarse como el orden de la mayor submatriz cuadrada que no contiene elementos nulos. Este concepto desempeña un papel fundamental en álgebra lineal y encuentra diversas aplicaciones en matemáticas y otras disciplinas.

El cálculo del rango de una matriz puede realizarse mediante el método de Gauss o el método de determinantes. En el enfoque de determinantes, se determina el rango evaluando el determinante de la mayor submatriz cuadrada presente en la matriz. Es esencial destacar que esta submatriz siempre posee el mismo número de filas y columnas, conformando así una matriz cuadrada necesaria para el cálculo del determinante.

Los siguientes ejemplos nos indican de manera general su rango sin realizar sus cálculos.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}; rg(A) = 3; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}; rg(B) = 2$$

Aplicaciones del rango de una matriz

El rango de una matriz tiene diversas aplicaciones prácticas, tales como:

- La determinación del número de soluciones en un sistema de ecuaciones lineales, según lo establece el teorema de Rouch-Frobenius. El sistema tiene al menos una solución si el rango de la matriz de coeficientes coincide con el rango de la matriz aumentada.

- La identificación de la invertibilidad de una matriz (existencia de inversa) al verificar si su rango es máximo, es decir, igual al número de filas o columnas.
- En teoría de control, el rango de una matriz se utiliza para evaluar la controlabilidad u observabilidad de un sistema lineal.
- En el ámbito del álgebra lineal, se define el rango de una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales como la dimensión del conjunto imagen.

4.5. EJERCICIOS DE APLICACIÓN

Ejercicio 1

Indicar cuántas filas o columnas son linealmente independientes en las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución 1: de la matriz A, como se puede observar, la segunda fila corresponde a la primera fila multiplicada por 2. Entonces, una fila es la combinación lineal de la otra y, por lo tanto, solo una de ellas es linealmente independiente. Así, su determinante es cero por una propiedad de determinante. Entonces, su rango es: $\text{rg}(A)=1$.

Solución 2: para la matriz B, podemos observar que la tercera fila es la suma de la primera y la segunda fila. Las dos primeras son linealmente independientes entre sí; por tanto, la matriz 3x3 se reduce a tener un rango menos de su dimensión, por lo que $\text{rg}(B)=2$.

Solución 3: en la matriz C, no hay ninguna operación entre las filas o columnas, es decir que no es combinación lineal; por tanto, $\text{rg}(C)=3$. Esto también podría determinarse al inicio, puesto que, en toda matriz triangular superior en cuya diagonal principal no hay ningún cero, el rango corresponde a la dimensión de la propia matriz. En este caso, $n=\text{rg}(C)=3$.

Ejercicio 2

Dada la siguiente matriz, hallar el rango de la matriz siguiente obteniendo las filas linealmente independientes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Solución: se indica que, para la matriz correspondiente, se tienen cinco filas, las mismas que iremos tratando una por una para verificar si son linealmente independientes así si denotamos la i -ésima fila como f_i . Para esto, las analizaremos en orden.

- Para la f_1 . Todos los valores son independientes.
- Para la f_2 , no existe ningún número real o un escalar tal que $f_2 = af_1$; por lo tanto, las filas son linealmente independiente.
- En la f_3 , se tiene que $f_3 = 2f_1$; por lo tanto, las filas no son linealmente independientes.
- En f_4 , la fila es nula, es decir (todas sus entradas son 0).
- Y, en la f_5 , se tiene que $f_5 = 2f_2 + f_1$; por lo tanto, tampoco es linealmente independiente con f_1 y f_2 .

Por lo indicado, se tiene que solo tenemos dos filas linealmente independientes, f_1 y f_2 . Así, al final, el rango de la matriz es $\text{rango } \text{rg}(A) = 2$.

Ejercicio 3

Dada la siguiente matriz, calcular por el método de Gauss-Jordan su rango:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

Solución: se tiene que recordar que el rango de una matriz es igual a la cantidad de filas no nulas obtenidas al finalizar el proceso de Gauss.

La matriz tiene tres filas correspondientes. El objetivo es tratar de que alguna fila tenga ceros correspondientes para reducir el número de rango. A la f_2 , le restamos $\frac{1}{2}$ de f_1 y se tiene:

$$f_2 - \frac{1}{2}f_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

A la f_3 , le restamos $-\frac{3}{2}$ de f_1 y se tiene:

$$f_3 - \frac{3}{2}f_1$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{7}{2} & 7 & \frac{-7}{2} \end{pmatrix}$$

Ahora, a la f_2 , le restamos $-\frac{1}{7}$ de f_3 y se tiene:

$$f_2 - \frac{1}{7}f_3$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 7 & \frac{-7}{2} \end{pmatrix}$$

Hemos encontrado, con las operaciones indicadas a f_2 , obtener ceros. Por lo tanto, la matriz resultante tiene $\text{rg}(A) = 2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{2} & 7 & \frac{-7}{2} \end{pmatrix}$$

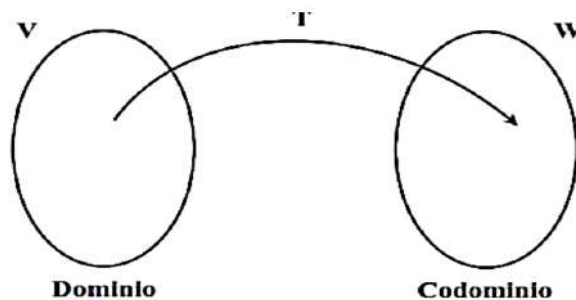
CAPÍTULO V

5. TRANSFORMACIONES LINEALES

5.1. DEFINICIÓN DE TRANSFORMACIÓN LINEAL

Cuando hablamos de transformaciones lineales, se introduce el concepto de función lineal, la cual es una regla de asignación que opera entre dos espacios vectoriales, así denotados como (V) y (W) . Una transformación lineal $(T: V \rightarrow W)$ implica que tanto el dominio (V) como el codominio (W) son espacios vectoriales. Sin embargo, no toda función que transforma vectores de (V) en vectores de (W) cumple con los requisitos para ser considerada lineal. Para que una función sea clasificada como transformación lineal, debe cumplir con ciertas condiciones específicas, siendo (V) el dominio y (W) el codominio de dicha transformación. Por lo tanto, diremos que, una transformación lineal es una función que, al aplicarse, realiza una asignación lineal de vectores desde el espacio vectorial (V) al espacio vectorial (W) .

Figura 5.1. Transformación lineal



$F: V \rightarrow W$ es una transformación lineal si y solo si cumple con las dos condiciones:

- $F(u+v) = F(u) + F(v) \quad \forall u, v \in V$
- $F(k \cdot v) = k \cdot F(v) \quad \forall v \in V, \forall k \in \mathbb{R}$

Ejemplo 1

Sea la transformación lineal:

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad T(u) = u \times w_0$$

Solución: se considera w_0 un vector fijo y u un vector cualquiera de $\mathbb{R}^3$. Veamos que la siguiente relación es una transformación lineal.

Condición 1: debe cumplir que $T(u+v) = T(u) + T(v) \quad \forall u, v \in V$

Para que cumpla la condición, usaremos la propiedad distributiva del producto vectorial respecto de la suma de vectores:

$$u_1, u_2 \in \mathbb{R}^3, \quad T(u_1 + u_2) = (u_1 + u_2) \times w_0 = u_1 \times w_0 + u_2 \times w_0 = T(u_1) + T(u_2)$$

Condición 2: debe cumplir que $T(k*u) = k*T(u) \quad \forall u \in V, \forall k \in \mathbb{R}$

Para ver que se cumple esta condición, podemos extraer el escalar:

$$T(k*u) = (ku) \times w_0 = k*(u \times w_0) = k*T(u); \text{ llqqd}$$

5.2. TEOREMA FUNDAMENTAL DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

El teorema, también conocido como el «Teorema de existencia y unicidad de una transformación lineal», indica lo siguiente: dados los espacios vectoriales (V) y (W) , con $(B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\})$ como una base para (V) y $(w_1, w_2, \dots, w_n)$ como vectores arbitrarios (ya sean iguales o distintos) en (W) , existe una única transformación lineal que satisface:

$$\begin{cases} T(v_1) = w_1 \\ \dots \\ T(v_n) = w_n \end{cases}$$

Ejemplo 2

Sean $V = \mathbb{R}^2$ y $W = \mathbb{R}^3$ se considera la base $B = \{(1,0), (1,1)\}$, y sean $w_1 = w_2 = (0,1,0)$, aplicando el teorema, existe una única transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que verifica:

$$T(1, 0) = (0, 1, 0)$$

$$T(1, 1) = (0, 1, 0)$$

Para demostrar, tomamos un vector genérico de $\mathbb{R}^2$ y lo escribimos como combinación lineal de la bas; o sea, buscamos sus coordenadas respecto de B:

$$(x, y) = \alpha(1, 0) + \beta(1, 1) \rightarrow \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha = x - y \\ \beta = y \end{cases}$$

Los escalares α, β son las coordenadas del vector (x, y) en la base B: Se indica

$$[(x, y)]_B = \begin{pmatrix} x - y \\ y \end{pmatrix}$$

que la relación $[(x, y)]_B$ significa las coordenadas del vector (x, y) en la base.

$$(x, y) = \alpha(1, 0) + \beta(1, 1)$$

Ahora se aplica la transformación lineal a ambos miembros:

$$\rightarrow T(x, y) = T(\alpha(1, 0) + \beta(1, 1))$$

Por las propiedades de las transformaciones lineales, reemplazamos α y β , de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} T(x, y) &= (x - y) \cdot (0, 1, 1) + y(0, 1, 0) \\ T(x, y) &= (0, x - y, 0) + (0, y, 0) \\ T((x, y)) &= (0, x, 0) \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos obtenido la fórmula de la transformación lineal que cumple con las condiciones indicadas

5.3. PROPIEDADES DE LAS TRANSFORMACIONES LINEALES

Las siguientes propiedades de transformación lineal son siempre verdaderas.

Propiedad 1. La imagen del vector nulo del dominio 0_V es el vector nulo del codominio 0_W :

$$T(0_V) = 0_W$$

Demostración

$$T(0_V) = T(0 * v) = 0 * T(v) = 0 * w = 0_W$$

En el momento en que representamos la relación $0v$ como el resultado de multiplicar el escalar 0 por cualquier vector perteneciente al espacio vectorial V , estamos haciendo uso de la segunda condición requerida para que una transformación sea considerada lineal. Posteriormente, reiteramos el empleo de la propiedad de los espacios vectoriales al aplicar el producto del escalar 0 a cualquier vector.

Propiedad 2. La imagen del vector $-v$ es igual al opuesto de la imagen de v

$$T(-v) = -T(v)$$

Demostración

$$T(-v) = T(-1 \cdot v) = -1 \cdot T(v) = -T(v)$$

Cuando tenemos la expresión $T(-v)$, estamos aplicando la transformación lineal T a la negación del vector v . En este contexto, también podemos expresar $-v$ como -1 multiplicado por v . Al utilizar la propiedad de homogeneidad de la transformación lineal, podemos factorizar el escalar -1 fuera de la transformación, obteniendo $-1 \cdot T(v)$. Finalmente, al aplicar la propiedad de aditividad de la transformación lineal, llegamos a la conclusión de que $T(-v)$ es equivalente a $-T(v)$. Por lo tanto, la expresión $T(-v) = -T(v)$ se deriva al combinar la aplicación de la transformación lineal a la negación del vector y utilizar propiedades algebraicas como la homogeneidad y aditividad.

Propiedad 3. Consideremos r vectores del espacio vectorial V

$$v_1, v_2, \dots, v_r \in V$$

Tomemos una combinación lineal en el dominio:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_r v_r$$

Donde $\alpha_i \in \mathbb{R}$.

Si aplicamos la transformación lineal F de V a W , teniendo en cuenta las propiedades enunciadas en la definición, resulta:

$$F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \dots + \alpha_r v_r) = \alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) + \dots + \alpha_r F(v_r)$$

Es decir que una transformación lineal «transporta» combinaciones lineales de V a W , conservando los escalares de la combinación lineal.

Isomorfismo

Definición. Decimos que una transformación lineal $T: V \rightarrow W$ es un isomorfismo si T es inyectiva y sobreyectiva. Esto es equivalente a decir que T es una transformación lineal invertible.

Ejemplo 3

Dada la siguiente transformación lineal $T: M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n}$, dada por

$T(A) = A - A^T$, indicar si es un isomorfismo, con A una matriz cuadrada.

Solución: notemos que núcleo $(T) = \{T(A) = O\} = \{A - A^T = O\} = \{A^T = A\} \neq \{O\}$. Por tanto, T no es inyectiva y así T no es un isomorfismo.

Ejemplo 4

Sea $T: R^3 \rightarrow P_2$ la transformación lineal dada por:

$T \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = (a+b) + (a-b+c)x + (cx)^2$. Determinar si T es un isomorfismo.

Solución: para empezar, veamos si T es inyectiva; para esto, vamos a calcular el núcleo de T . Notemos que $T \begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix} = 0$; por definición, si y solamente si $(a+b) + (a-b+c)x + (cx)^2 = 0$. Igualando términos semejantes obtenemos: $a+b = 0$, $a-b+c = 0$ y $c = 0$. Al resolver el sistema de ecuaciones obtenemos que: $a=0$, $b=0$ y $c=0$. Esto demuestra que el núcleo de T solamente contiene al vector nulo y esto implica que nulidad $(T)=0$ por lo tanto T es una transformación lineal inyectiva.

Luego, del Teorema del Rango, obtenemos que:

$3 = \dim(R^3) = \text{nulidad}(T) + \text{rango}(T) = \text{rango}(T)$. Por lo tanto:

$\text{rango}(T) = 3 = \dim(P_2)$. Esto demuestra que T también es sobreyectiva y por lo tanto T es un isomorfismo. llqgd.

5.4. REPRESENTACIÓN MATRICIAL DE UNA TRANSFORMACIÓN LINEAL

Las transformaciones lineales son una parte fundamental de las matemáticas y la física. Son utilizadas para describir cómo una función lineal transforma un

conjunto de vectores en otro conjunto de vectores. Una de las formas más comunes de representar una transformación lineal es a través de una matriz.

Una transformación lineal puede ser representada por una matriz cuadrada, donde cada columna representa la imagen de un vector de la base de partida. Por ejemplo, si tenemos una transformación lineal que lleva un vector de dos dimensiones a otro vector de tres dimensiones, la matriz de representación tendrá tres columnas.

La representación matricial de una transformación lineal tiene varias ventajas. Una de ellas es que permite realizar operaciones algebraicas con las matrices, como la multiplicación de matrices. Además, las matrices facilitan el cálculo de la composición de transformaciones lineales, debido a que se puede simplemente multiplicar las matrices correspondientes.

Para entender mejor cómo se representa una transformación lineal mediante una matriz, consideremos el siguiente ejemplo. Supongamos que tenemos una transformación lineal que rota un vector en el plano en sentido antihorario. Para representar esta transformación lineal en forma matricial, necesitamos encontrar las imágenes de los vectores de la base de partida bajo la transformación.

En el caso de la rotación antihoraria en el plano, los vectores de la base de partida son el vector unitario i y el vector unitario j . La imagen de i bajo la transformación es el vector $(-j)$, y la imagen de j es i . Por lo tanto, la matriz de representación de esta transformación lineal será:

Esta matriz representa la transformación lineal de rotación antihoraria en el plano.

$$\text{Sea } T: R^2 \rightarrow R^3 \text{ dada por: } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 4y \\ 2x - 4y \end{pmatrix}$$

Ejemplo 5

Dada la siguiente transformación, indique si es una lineal.

$$\text{Sea } T: R^2 \rightarrow R^3 \text{ dada por: } T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 3x + 4y \\ 2x - 4y \end{pmatrix}$$

Tomamos dos vectores cualesquiera, es decir:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in R^2;$$

Luego tenemos la transformación lineal que es.

$$T \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right] = T \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) \\ 3(x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) \\ 2(x_1 + x_2) - 4(y_1 + y_2) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 & -y_1 - y_2 \\ 3x_1 + 3x_2 + y_1 + y_2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 4y_1 - 4y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - y_1 \\ 3x_1 + y_1 \\ 2x_1 - 4y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 - y_2 \\ 3x_2 + y_2 \\ 2x_2 - 4y_2 \end{pmatrix}$$

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}; \text{ cumple la primera propiedad}$$

Ahora, para la segunda propiedad, se tiene:

$$T \left[\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = T \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x - \alpha y \\ 3(\alpha x) + (\alpha y) \\ 2(\alpha x) - 4(\alpha y) \end{pmatrix} =$$

$$\alpha \begin{pmatrix} x - y \\ 3x + y \\ 2x - 4y \end{pmatrix} = \alpha T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \text{llqgd}$$

Ahora, si vamos a calcular la representación matricial de:

Sea $T: R^2 \rightarrow R^3$ dada por

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ 3x + y \\ 2x - 4y \end{pmatrix}$$

Tenemos la base canónica para R^2 que es $(1,0); (0,1)$. Ahora representamos:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, la representación matricial viene a ser lo siguiente:

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$$

Se dice que la imagen de una matriz es igual al espacio generado por las columnas, es decir los vectores son linealmente independientes, no dependen el uno del otro...

$$imT = gen\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}\right\}$$

Así, el rango es igual a 2 por la siguiente relación:

$$v(T) + \rho(T) = 2; \text{ como } v(T) = 0 \text{ por ser la nulidad se tiene:}$$

$$nulidad(T) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Puesto que la transformación va de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$, cumple la transformación.

5.5. VALORES Y VECTORES PROPIOS, MATRIZ DIAGONALIZABLE

Los conceptos básicos estudiados en este tema son útiles en todas las áreas de las matemáticas puras y aplicadas, y aparecen en contextos mucho más generales que los que consideramos aquí.

Una de las principales aplicaciones de la teoría espectral son los sistemas dinámicos discretos (ejemplo introductorio), pero también pueden utilizarse los valores propios para estudiar ecuaciones diferenciales y sistemas dinámicos continuos. Además proporcionan información crítica en el diseño de ingeniería y se presentan naturalmente en campos como la física y la química.

- Un escalar λ se llama valor propio de A si existe una solución no trivial $x \neq 0$ de $A \cdot x = \lambda \cdot x$; una de esas soluciones no triviales X se denomina vector propio de A asociado al valor propio λ .
- El conjunto de todos los valores propios de una matriz cuadrada A se denomina espectro de A y se denota $\beta(A)$.

Cierta información útil de los valores propios de una matriz cuadrada A se encuentra codificada en una ecuación escalar llamada ecuación característica de A . Este hecho nos va a permitir enunciar un resultado de gran importancia práctica para el cálculo de los valores propios de una matriz cuadrada.

$$A \cdot \{x\} = \lambda \cdot \{x\} \Rightarrow (A - \lambda \cdot I) \cdot \{x\} = \{0\} (*)$$

Para que λ sea valor propio de la matriz cuadrada A , el sistema homogéneo $(*)$ ha de tener soluciones no triviales. Luego, el determinante de la matriz cuadrada $A - \lambda I$ ha de ser cero.

Polinomio característico de A :

$$\det (A - \lambda I) = 0$$

Los valores propios de una matriz cuadrada son las raíces de su polinomio característico:

$$p(\lambda) = \det (A - \lambda \cdot I)$$

Ejercicios resueltos

1. Determinar cuáles de las siguientes aplicaciones son lineales.

(i) $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $f((x, y, z)) = (x - y, y + 2z)$.

(ii) $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f((x, y, z)) = (x - y, y + 2z)$.

Solución: (i) Es lineal puesto que, $\forall (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$ y para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, se cumple

$$\begin{aligned} f(\alpha(x_1, y_1, z_1) + \beta(x_2, y_2, z_2)) &= f((\alpha x_1 + \beta x_2, \alpha y_1 + \beta y_2, \alpha z_1 + \beta z_2)) = \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_2 - \alpha y_1 - \beta y_2, \alpha y_1 + \beta y_2 + 2\alpha z_1 + 2\beta z_2) = \\ &= (\alpha x_1 - \alpha y_1, \alpha y_1 + 2\alpha z_1) + (\beta x_2 - \beta y_2, \beta y_2 + 2\beta z_2) = \\ &= \alpha(x_1 - y_1, y_1 + 2z_1) + \beta(x_2 - y_2, y_2 + 2z_2) = \\ &= \alpha f((x_1, y_1, z_1)) + \beta f((x_2, y_2, z_2)). \end{aligned}$$

(ii) No es lineal puesto que:

$$f((0, 1, 0) + (0, 2, 0)) = f((0, 3, 0)) = (-9, 3) \neq (-1, 1) + (-4, 2) = f((0, 1, 0)) + f((0, 2, 0)).$$

2. Dado la siguiente matriz, calcular el núcleo y la imagen de la aplicación lineal

$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow P_2(x)$ cuya matriz asociada (empleando notación por filas) respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^4$ y $\{1, x, x^2\}$ es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

Solución: si empleamos la expresión matricial de f , sabemos que

$$f((a, b, c, d)) = (a \ b \ c \ d)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \end{pmatrix}$$

Se tiene: $(a + 2b - c + 2d) + (-4b - 2d)x + (-a + b - c - 2d)x^2$.

Entonces,

$$\ker f = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid f((a, b, c, d)) = 0\}$$

$$= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid (a + 2b - c + 2d) + (-4b - 2d)x + (-a + b - c - 2d)x^2 = 0\}$$

$$= \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \mid a + 2b - c + 2d$$

$$= -4b - 2d = -a + b - c - 2d = 0\}$$

$$= \{(7/2 b, b, 3/2 b, -2b) \mid b \in \mathbb{R}\}$$

5.6. EJERCICIOS

1. Indique si la transformación $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + y \\ x \end{bmatrix} \text{ Es lineal.}$$

2. Demuestre que la transformación $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es lineal:

$$T((x, y, z)') = (x + z, y - z)'$$

3. Es lineal la transformación $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = x + 1$
4. Si $V_1 = (1, -1)$, $V_2 = (2, -1)$, $V_3 = (-3, 2)$ y $W_1 = (1, 0)$, $W_2 = (0, -1)$, $W_3 = (1, 1)$.
Existe una transformación lineal $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $T(v_i) = W_i$ para $i = 1, 2, 3$
5. Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, transformación lineal, tal que:
 $T(1, 1, 1) = (1, 0, 2)$; $T(1, 0, 1) = (0, 1, 1)$; $T(0, 1, 1) = (1, 0, 1)$
 Encontrar $T(x, y, z)$
6. Sea T la siguiente transformación lineal:
 $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \mid T((x, y)) = (x + 2y, x - y, y)$
 ¿Existirá una matriz A que multiplicada por (x, y) de por resultado $(x + 2y, x - y, y)$?
7. Ahora consideremos la siguiente transformación lineal:
 $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \mid F((x, y, x)) = (x + 2z, -y)$
8. Decir si las siguientes aplicaciones son o no transformaciones lineales.
 - a. $f(x, y) = x^2 + y^2$
 - b. $f(x) = (0, x)$
 - c. $f(x) = 2x$
 - d. $f(x, y) = x^2 + 2y$

CONCLUSIONES

En el primer capítulo, se determinó la matriz superior, inferior y diagonal, el determinante de una matriz, las técnicas para encontrar su solución en un determinante, sus aplicaciones. Lo más importante de este capítulo fue encontrar una metodología para hallar la solución correcta de matrices y determinantes, porque permite verificar si la solución encontrada cumple con lo requerido.

Es importante indicar que los pasos para encontrar la solución deben realizarse de manera correcta, puesto que una operación mal realizada no llegará a cumplir con el objetivo deseado.

Para el segundo capítulo del libro, se encontró la matriz inversa y los sistemas de ecuaciones, tomando en cuenta que se necesitó del conocimiento básico del primer capítulo. Para encontrar la inversa de una matriz, se aplicaron técnicas diferentes, así como para hallar la solución de un sistema de ecuaciones.

Lo más importante de encontrar la inversa de una matriz es que se puede comprobar la solución aplicando la relación descrita de $A \cdot A^{-1} = I$, y así se encuentra una metodología correcta. De igual manera, para el sistema de ecuaciones, se aplicaron cuatro técnicas diferentes, llegando a concluir que, al aplicar cualquiera, la solución será la misma.

Se aplicó el programa Derive 6.0 para hallar la inversa de una matriz y la solución del sistema de ecuaciones, el cual permitió optimizar tiempo y fue de gran ayuda en la resolución de estos temas.

El tercer capítulo, mostró cuán importante es tratar los vectores en R^n y el espacio vectorial, a partir de la definición de vector, sus propiedades de la suma, del producto punto; de los vectores perpendiculares, distancia y norma de un vector, para luego entender el espacio y subespacio vectorial.

Fue de mucha ayuda, en este capítulo, conocer las propiedades de la suma de vectores, del producto, para resolver ejercicios, tanto de espacios y subespacios vectoriales, así como de la aplicación correspondiente.

Para el cuarto capítulo, se introdujo la combinación lineal, luego la dependencia e independencia lineal respecto a los ejemplos desarrollados, utilizando los vectores conocidos en los capítulos anteriores.

Se conoció también la base y dimensión de un vector, para luego encontrar el rango de una matriz que es muy importante en este tema. Las aplicaciones fueron esenciales, puesto que es fundamental en el perfil profesional del futuro ingeniero en software.

En el quinto y último capítulo, se desarrollaron ejercicios, buscando la solución correspondiente para que cumpla si es una transformación lineal o no, a partir de dos propiedades fundamentales, indicando que, si no cumple con alguna propiedad, el ejemplo no es una transformación lineal.

Aprendimos a representar una matriz de una transformación lineal, para concluir realizando ejercicios de valores y vectores propios. De esta manera, se completó el trabajo propuesto del libro *Introducción al álgebra lineal*.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Colmenares, G. (s. f.). *Análisis multivariante y sus aplicaciones*. http://web-delprofesor.ula.ve/economia/gcolmen/programa/economia/ejercicios_capitulo_1.pdf
- Dado, A. (2011). *Introducción al álgebra lineal*.
- Departamento de Matemáticas, CCIR/ITESM. (2009, 16 de abril). *Transformaciones lineales*. <https://www.uv.mx/personal/aherrera/files/2014/08/21a.-TRANSFORMACIONES-LINEALES-1.pdf>
- Dependencia e independencia lineal. Bases | Superprof. (s. f.). *Fuerza en un campo magnético de una bobina sin núcleo*. [https://www.ld-didactic.de/software/524221es/Content/ExperimentExamples/Physics/Electricity/ForceAirCoil.htm#:~:text=F%20%3D%20q%20%C2%B7%20\(v%20%C3%97,que%20forman%20v%20y%20B](https://www.ld-didactic.de/software/524221es/Content/ExperimentExamples/Physics/Electricity/ForceAirCoil.htm#:~:text=F%20%3D%20q%20%C2%B7%20(v%20%C3%97,que%20forman%20v%20y%20B)
- Gómez, I. P. (2020, 30 de marzo). *Álgebra y geometría analítica*. <https://aga.frba.utn.edu.ar/matriz-asociada-a-una-transformacion-lineal/>
- Herrero, M. (s. f.). *Sistemas lineales homogéneos*. <http://www.ecoribera.org/ciencias/matematicas/1-bachillerato/153-sistemas-lineales-homogeneos>
- HiRu. (s. f.). *Fuerzas nucleares*. <https://www.hiru.eus/es/fisica/fuerzas-nucleares#:~:text=De%20este%20modo%2C%20A%20%3D%20Z%20%2B%20N>
- JoseC TV. (2019). *Tema 1: vectores en R^2 , R^3 y R^n (Álgebra Matricial)*. YouTube. <https://youtu.be/oaDsepAHZ48?si=eqAJe-ArzwN5XjP>
- Lay, David. (2016). *Linear Algebra and Its Applications*. Pearson.
- Libretexts. (2022, 2 noviembre). 6.4: *Fuerza nuclear débil*. LibreTexts español. https://espanol.libretexts.org/Fisica/F%C3%ADsica_Nuclear_y_de_Part%C3%ADculas/Libro%3A_F%C3%ADsica_Nuclear_y_de_Part%C3%A

Dculas_(Walet)/06%3A_Las_cuatro_fuerzas_fundamentales/6.04%3A_Fuerza_Nuclear_D%C3%A9bil#:~:text=La%20d%C3%A9bil%20fuerza%20nuclear%20se,F%2C%20despu%C3%A9s%20de%20su%20descubridor.

- Llopis, J. (s. f.). *Cálculo de determinantes de matrices*. <https://www.mates-facil.com/matrices/resueltos-matrices-determinantes.html>
- Marta. (2023a, 1 de noviembre). *Ejercicios - Sistemas homogéneos*. Super-Prof. <https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebralineal/sistemas/sistemas-homogeneos.html>
- ———. (2023b, 1 de noviembre). *Qué son los sistemas homogéneos*. Superprof. <https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebra-lineal/sistemas/sistemas-homogeneos-7.html>
- ———. (s. f.a). *Ejercicios resueltos de matriz inversa*. Superprof. <https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebralineal/matrices/ejercicios-resueltos-de-matriz-inversa.html>
- ———. (s. f.b). *superprof*. Obtenido de superprof: <https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebralineal/matrices/ejercicios-del-rango-de-una-matriz.html>
- ———. (s. f.c) *Dependencia e independencia lineal*. Bases. Superprof. <https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/analitica/vectores/dependencia-e-independencia-lineal-bases.html>
- Plushmaths. (2019). *Los vectores en el álgebra lineal*. Plushmaths. <https://es.plusmaths.com/los-vectores-en-el-algebra-lineal.html>
- Porto, J. P., y Merino, M. (2023, 7 de julio). *Masa - qué es, tipos, definición y concepto*. Definición.de. <https://definicion.de/masa/>
- Rosas, O. (2017, 24 de enero). *Combinaciones lineales*. Compilando Conocimiento. <https://compilandokonocimiento.com/2017/01/24/combinaciones-lineales/>
- Strang, G. (2023). *Introduction to the linear algebra*. <https://math.mit.edu/~gs/linearalgebra/ila6/indexila6.html>

- StudySmarter. (s. f.). *Rango de una matriz: cálculo y ejemplos* |. <https://www.studysmarter.es/resumenes/matematicas/numeros-y-algebra/rango-de-una-matriz/>
- Universidad Nacional de Colombia. (s. f.). *Clase 5. Parte 2. Sistemas homogéneos*. Universidad Nacional de Colombia: <https://ciencias.medellin.unal.edu.co/cursos/algebra-lineal/clases/8-clases/52-clase-5-parte2.html>
- USACH. (2005). *Ejercicios resueltos de transformaciones lineales*. Universidad de Santiago de Chile. https://www.u-cursos.cl/faciqyf/2011/2/FBQI2201/1/material_docente/bajar?id=591270&lsar=1&file=3
- Yo soy tu profe. (2017, 7 de junio). *Operaciones con matrices – Ejercicios resueltos*. Yo soy tu profe: <https://yosoytuprofe.files.wordpress.com/2017/06/operaciones-con-matrices-ejerciciosresueltos1.pdf>

- https://elearning.esPOCH.edu.ec/pluginfile.php/8019/mod_resource/content/1/DEPENDENCIA%20E%20INDEPENDENCIA%20LINEAL%20ENTRE%20VECTORES.pdf
- Login - CAS – Central Authentication Service. (s. f.).

ANEXOS

Archivo: Ejemplo matrices

Fecha: 8/5/2024

Hora: 12:11:38

$$\#1: \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\#2: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & \frac{1}{2} \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\#3: \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Dada las siguientes matrices #1; #2; #3; encontrar:
Encontrar:

a.- $2\#2 - \frac{1}{3}\#1 + 4\#3$

b.- $\#1.\#2; \#2.\#1$

c.- $\#1.(\#2.\#3) = (\#1.\#2).\#3$

Solucion:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & \frac{1}{2} \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & \frac{1}{2} \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Archivo: Ejemplo matrices

Fecha: 8/5/2024

Hora: 12:11:38

$$\#6: \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -4 & 8 & 1 \\ -6 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\#7: -\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\#8: \text{SOLVE} \left(-\frac{1}{3} \cdot \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\#9: \begin{bmatrix} -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\#10: 4 \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\#11: \text{SOLVE} \left(4 \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\#12: \begin{bmatrix} 12 & -8 & 4 \\ -8 & 16 & 4 \\ 0 & 12 & 8 \end{bmatrix}$$

Archivo: Ejemplo matrices

Fecha: 8/5/2024

Hora: 12:11:38

$$\#13: \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ -4 & 8 & 1 \\ -6 & 6 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 & -8 & 4 \\ -8 & 16 & 4 \\ 0 & 12 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ -\frac{38}{3} \\ -\frac{16}{3} \end{bmatrix}$$

$$- \frac{14}{3} \quad \frac{29}{3}$$

$$\frac{68}{3} \quad \frac{14}{3}$$

$$17 \quad \frac{34}{3}$$

$$\#14: \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & \frac{1}{2} \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 17 & 12 \\ -9 & 23 & 10 \\ -14 & 14 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\#15: \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & \frac{1}{2} \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 17 & 12 \\ -9 & 23 & 10 \\ -14 & 14 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\#16: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & \frac{1}{2} \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 19 & 9 \\ 1 & \frac{27}{2} & 3 \\ -7 & 12 & 4 \end{bmatrix}$$

Al multiplicar las matrices #1.#2 y luego las matrices #2.#1 los valores no son los mismos, entonces la propiedad conmutativa en multiplicación de matrices no se cumple

Archivo: Ejemplo matrices

Fecha: 8/5/2024

Hora: 12:11:38

$$\#17: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & \frac{1}{2} \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\#18: \text{SOLVE} \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & \frac{1}{2} \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\#19: \begin{bmatrix} -1 & 15 & 9 \\ -14 & \frac{43}{2} & 3 \\ -15 & 24 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\#20: \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 15 & 9 \\ -14 & \frac{43}{2} & 3 \\ -15 & 24 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\#21: \text{SOLVE} \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 15 & 9 \\ -14 & \frac{43}{2} & 3 \\ -15 & 24 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$\#22: \begin{bmatrix} -46 & 112 & 37 \\ -73 & 140 & 34 \\ -70 & \frac{165}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

La expresión #22, nos indica la operación de #1.(#2.#3)

Archivo: Ejemplo matrices

Fecha: 8/5/2024

Hora: 12:11:38

$$\#23: \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & \frac{1}{2} \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\#24: \text{SOLVE} \left(\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & \frac{1}{2} \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\#25: \begin{bmatrix} -4 & 17 & 12 \\ -9 & 23 & 10 \\ -14 & 14 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\#26: \begin{bmatrix} -4 & 17 & 12 \\ -9 & 23 & 10 \\ -14 & 14 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\#27: \text{SOLVE} \left(\begin{bmatrix} -4 & 17 & 12 \\ -9 & 23 & 10 \\ -14 & 14 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

$$\#28: \begin{bmatrix} -46 & 112 & 37 \\ -73 & 140 & 34 \\ -70 & \frac{165}{2} & -1 \end{bmatrix}$$

$$\#29: \text{DET} \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 17$$

Página: 5

Archivo: Ejemplo matrices

Fecha: 8/5/2024

Hora: 12:11:38

$$\#30: \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & -4 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \\ 5 & -5 & -5 & 5 \\ -3 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\#31: \text{DET} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 1 & -4 \\ 5 & 6 & 4 & 3 \\ 5 & -5 & -5 & 5 \\ -3 & 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 900$$

$$\#32: \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 4 & \frac{1}{2} \\ -3 & 3 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{59} & \frac{10}{59} & -\frac{22}{59} \\ \frac{5}{59} & \frac{22}{59} & -\frac{13}{59} \\ \frac{12}{59} & -\frac{18}{59} & \frac{16}{59} \end{bmatrix}$$

$$\#33: \text{SOLVE}([2 \cdot x + y = 1, 3 \cdot x - 5 \cdot y = 6], [x, y])$$

$$\#34: \text{SOLVE}(\text{SOLVE}([2 \cdot x + y = 1, 3 \cdot x - 5 \cdot y = 6], [x, y]), x)$$

$$\#35: \left[x = \frac{11}{13} \wedge y = -\frac{9}{13} \right]$$

$$\#36: \text{SOLVE}([x + y = 5, -4 \cdot x + 5 \cdot y = 2], [x, y])$$

$$\#37: \left[x = \frac{23}{9} \wedge y = \frac{22}{9} \right]$$

Esta obra denominada *Introducción al álgebra lineal*, se determina que el álgebra lineal que se conoce como una de las ramas fundamentales de las matemáticas, tiene como rol principal el tratamiento de matrices, determinantes, sistema de ecuaciones, espacios vectoriales, combinaciones y transformaciones lineales, convirtiéndose en una herramienta esencial en las distintas áreas de conocimiento, como la física, computación, arquitectura e ingeniería, y últimamente en la rama de la inteligencia artificial.

Esta obra está diseñada exclusivamente para lectores, estudiantes de todas las universidades que tienen el área básica de formación, así como para docentes de los primeros niveles del sistema universitario del país.

Juan Mario Vargas Guambo. Doctor en Matemática, título de tercer nivel, representante estudiantil a Consejo Politécnico de la Espoch, cuenta con una especialidad en Computación Aplicada al Ejercicio Docente, maestría en Docencia Universitaria e Investigación Educativa, maestría en Matemática Básica, evaluador máster en la Revista Cimogsys, investigador junior, docente área Matemática de la FIE. Experiencia profesional con más de treinta años en la Espoch, cargos directivos, director Programas Carrera de la FADE, coordinador Programas de Educación Continua, subdirector de Posgrado, secretario académico de Posgrado, director y miembro de Tribunal de Titulación de Posgrado. Ha publicado varios artículos científicos.

ISBN: 978-9942-51-072-3



9 789942 510723

